

## Tesis de Posgrado

# Efectos no-lineales en cosmología clásica y cuántica.

El Hasi, Claudio

1994

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

El Hasi, Claudio. (1994). Efectos no-lineales en cosmología clásica y cuántica.. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2675\\_ElHasi.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2675_ElHasi.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

El Hasi, Claudio. "Efectos no-lineales en cosmología clásica y cuántica.". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1994.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2675\\_ElHasi.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2675_ElHasi.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FISICA

EFECTOS NO-LINEALES EN COSMOLOGIA  
CLASICA Y CUANTICA

Autor: Claudio El Hasi

Director de Tesis: Dr. Esteban Calzetta

*Handwritten signature:*  
F. 25  
26  
El. 2

Trabajo de Tesis presentado para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

1994

# FCE y N BIBLIOTECA

A Vivi.  
*Sacha e Irina*

RESUMEN .....	1
I - INTRODUCCIÓN .....	2
I-1 Sistemas Dinámicos y Relatividad General .....	2
I-2 Cosmología como Sistema Dinámico .....	6
I-3 Plan de Tesis .....	9
II - CAOS EN UNA COSMOLOGÍA SENCILLA .....	12
II-1 El modelo .....	13
II-2 Análisis de la Dinámica .....	16
II-3 Tratamiento numérico del modelo .....	20
II.3.a - Espectro de Exponentes de Lyapunov .....	24
II.3.b - Secciones de Poincaré .....	29
II.3.c - Predictibilidad del Caos .....	33
III - CAOS EN COSMOLOGÍAS ISÓTROPAS Y HOMOGÉNEAS .....	36
III-1 El modelo generalizado .....	37
III-2 Estabilidad Lineal del Sistema .....	38
III-3 Curvas Frecuencia - Frecuencia .....	43
III-4 Resultados Numéricos .....	46
IV - DINÁMICA NO TRIVIAL EN MODELOS INFLACIONARIOS .....	50
IV-1 El Modelo .....	52
IV-2 Análisis del Modelo .....	54
IV.2.a - La Integral de Melnikov .....	58
IV-3 El Caso Homogéneo. Estructuras en el Espacio de Fases .....	61
IV-4 El Caso Inhomogéneo. Difusión de Arnold .....	66

V - EFECTOS NO LINEALES EN COSMOLOGÍA SEMICLÁSICA .....	74
V-1 Ecuaciones Autoconsistentes del Sistema .....	76
V-2 Creación de Partículas y Resonancias .....	81
VI - CONCLUSIONES .....	86
APÉNDICE A - PROGRAMA UTILIZADO .....	90
APÉNDICE B - CÁLCULO DE LA INTEGRAL DE MELNIKOV .....	94
APÉNDICE C - VALORES DE EXPECTACIÓN RENORMALIZADOS .....	96
APÉNDICE D - MÉTODO DE RENORMALIZACIÓN .....	99
REFERENCIAS .....	101
AGRADECIMIENTOS .....	108

## RESUMEN

Una de los rasgos salientes de la *Teoría de la Relatividad General* es que las ecuaciones que gobiernan el campo gravitatorio son de caracter *no-lineal*. Debido a que los sistemas no lineales presentan una gran riqueza de comportamiento, aplicaremos nociones de *Teoría de Sistemas Dinámicos* a situaciones donde analizar estos efectos se hace ineludible en el Universo Primitivo.

Comenzaremos con el estudio de un Universo de Friedmann - Robertson - Walker acoplado a un campo escalar, real y masivo. Dividiremos el Hamiltoniano del sistema en una parte integrable más una perturbación, analizando los límites de estabilidad y la existencia de resonancias de la dinámica no perturbada. Calcularemos el Espectro de Exponentes de Lyapunov en las regiones regular y caótica del espacio de fases. Dado que la noción de Exponente de Lyapunov es dependiente de la noción de *medida*, implementaremos el método de las Secciones de Poincaré como confirmación, independiente, de la aparición de caos.

Para ampliar nuestra batería de ejemplos consideraremos un modelo más completo, incluyendo constante cosmológica y autointeracción del campo escalar. Estudiando la estabilidad lineal de la dinámica, confirmaremos la posible existencia de caos en estos modelos generalizados. Implementaremos el método de las curvas Frecuencia - Frecuencia como forma sistemática de hallar condiciones iniciales para construir las Secciones de Poincaré en un entorno de las regiones resonantes.

Al considerar un modelo de mayor relevancia cosmológica, confirmaremos la validez del Principio de Calvicie Cósmica en el mismo y verificaremos la aparición de estructuras en el espacio de fases (cantoros e islas de estabilidad), debido a cuya existencia el comportamiento del sistema dista mucho de ser trivial. Incluiremos un modo no homogéneo al campo escalar, para estudiar la reacción de estos modelos al incrementarse el número de grados de libertad del sistema, mostraremos que los resultados obtenidos son compatibles con un proceso de Difusión de Arnold.

En un modelo semiclásico y autoconsistente, del Universo Primitivo, estudiaremos el proceso de creación de partículas. Confirmaremos que el mismo se debe a la presencia de interacciones resonantes entre los distintos grados de libertad. Esto muestra la estrecha relación entre caos a nivel clásico y creación de partículas a nivel semiclásico y la importancia de las contribuciones no lineales como *fuentes* de efectos no triviales en Cosmología.

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

El objeto central de la presente Tesis es estudiar diversos efectos, tanto clásicos como cuánticos, debidos a la no linealidad de las ecuaciones que, hasta el presente, mejor describen la evolución del universo: las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General (RG) [Weinberg 1972; Misner, Thorne y Wheeler 1973; Landau y Lifshitz 1975] y la Teoría Cuántica de Campos (TCC) [Bjorken y Drell 1964; Itzykson y Zuber 1980; Ryder 1985]. Dentro del contexto clásico estudiaremos, como manifestación particular de la no linealidad, la posible existencia de comportamiento irregular o caótico [Poincaré 1892; Arnold y Avez 1968; Ozorio de Almeida 1988; Tabor 1989]; y la formación de estructuras en el espacio de fases, que conduzcan a una dinámica no trivial del sistema. Desde el punto de vista cuántico analizaremos la influencia de términos no lineales, imprescindibles al renormalizar, consistentemente, la teoría semiclásica [Birrel y Davies 1982], dentro del contexto de los modelos inflacionarios [Guth 1981; Brandenberger 1985; Abbott y Pi 1986; Kolb y Turner 1990]; y la aparición de resonancias como indicación de efectos disipativos y de pérdida de predictibilidad, también a nivel semiclásico [Berry 1983].

### I-1 Sistemas Dinámicos y Relatividad General

En los últimos 25 años ha cobrado interés el estudio de los sistemas no lineales. Esto se ha debido, principalmente, a la creciente disponibilidad de computadoras que permiten ejecutar una gran cantidad de cálculos a alta velocidad y, además, al descubrimiento de sistemas con comportamiento caótico. Dicho en forma simple, un sistema caótico es un sistema determinista que exhibe un comportamiento irregular o extraño, es

decir, dadas dos condiciones iniciales distintas, pero muy similares, el comportamiento del sistema para tiempos largos puede ser completamente diferente en ambos casos.

Por cierto, es un hecho conocido que existen fenómenos naturales cuya predicción no es sencilla. Por ejemplo: los movimientos atmosféricos obedecen las leyes de la física, pero las predicciones meteorológicas se realizan todavía en término de probabilidades. El clima, un flujo de agua, una tirada de dados tienen, todos ellos, aspectos impredecibles. Al no aparecer una relación clara entre causa y efecto, se dice que representan fenómenos estocásticos. Existía sin embargo la convicción de que esta impredecibilidad era fruto de la falta de información, que era suficiente recoger y procesar una mayor cantidad de datos para obtener una descripción completa de estos fenómenos

Este enfoque se ha visto alterado por el descubrimiento de que algunos sistemas deterministas muy simples, con sólo unos pocos grados de libertad, pueden generar un comportamiento impredecible denominado *Caos* [Lorenz 1963; Hénon y Heiles 1964; Crutchfield et al. 1986; Jensen 1987]. Existen dos características importantes en el comportamiento caótico: i) puede darse en sistemas muy simples. ii) aparentemente está regido por reglas fijas, es decir, es determinista. Se ha detectado comportamiento caótico en sistemas tan disímiles como: la oscilación de los niveles de las concentraciones de las reacciones químicas, los latidos de las células del corazón de pollo y muchos osciladores eléctricos y mecánicos, e incluso en modelos simulados de epidemias y de la actividad eléctrica de una célula nerviosa (Para una recopilación bibliográfica ver por ejemplo [MacKay y Meiss 1987; Cvitanović 1989; Bai-Lin 1990]).

Tal vez la elección de la palabra *Caos*, para describir esta clase de fenómenos, haya sido un poco desafortunada, ya que puede asociarse fácilmente con algo carente de estructura. Los sistemas caóticos no carecen de estructura, por el contrario su comportamiento exhibe una estructura mucho más rica e interesante que los sistemas integrables [Zaslavsky 1985; Guckenheimer y Holmes 1983; Froyland 1992]. No obstante, es evidente que presentan aspectos de impredecibilidad y pérdida (aparente) de la información, que están asociados con el carácter *no lineal* de la evolución del sistema. En contraposición, los sistemas lineales son más fáciles de analizar y, en principio, son siempre integrables, por ejemplo utilizando el *principio de superposición*. Muchos sistemas



físicos, gobernados por ecuaciones no lineales presentan comportamiento caótico. Los ejemplos pueden encontrarse en prácticamente todas las ramas de la física.

El marco general en el que se estudia el caos es la llamada Teoría de los Sistemas Dinámicos (TSD) [Arnold 1978; Goldstein 1980; Percival y Richards 1982; Lichtenberg y Lieberman 1982]. Un sistema dinámico consta de dos partes: la noción de estado (que da la información esencial sobre el sistema) y una dinámica (una regla que describe cómo evoluciona el estado en el tiempo). La evolución puede representarse en el espacio de fases, construcción abstracta cuyas coordenadas son las componentes del estado. Una de las maneras más prácticas de diagnosticar el comportamiento de un sistema dinámico es el estudio del espectro de exponentes de Lyapunov [Oseledec 1968; Benettin et al. 1980]. Otra es a través de las secciones de Poincaré [Poincaré 1892; Birkhoff 1927]. Por definición los exponentes de Lyapunov son los promedios de velocidades de divergencia o convergencia de órbitas cercanas en el espacio fásico. Si existe al menos un exponente positivo, en un espacio de fases compacto, el sistema se dice caótico. Esto significa que sistemas cuyos estados iniciales son muy parecidos rápidamente difieren en su comportamiento. A su vez, las secciones de Poincaré se construyen seleccionando un plano en el espacio de fases y recogiendo los puntos donde una órbita particular cruza este plano en un dado sentido. Si consideramos sólo los puntos correspondientes a la intersección de la trayectoria con el plano, se obtiene una aplicación (o mapa) del plano sobre sí mismo; es posible mostrar que el esquema resultante, en este espacio de fases reducido, representa un reflejo fiel de la complejidad del comportamiento del sistema total.

Por otra parte, una de las ramas más activas de la física teórica, en años recientes, ha sido la RG. Por la naturaleza de los objetos que se tratan en ella — interrelación entre el campo gravitatorio y campos de materia — puede abordarse desde la perspectiva de la TSD. Sin embargo, no es una teoría dinámica en el sentido usual, es bastante complicado hablar de grados de libertad evolucionando en el “tiempo”, ya que el “tiempo”, al ser considerado una coordenada más, no posee significado absoluto como ocurre en las teorías dinámicas clásicas donde se presupone la existencia de un “tiempo Newtoniano”. Sin embargo, es posible establecer una división entre espacio y tiempo mediante una foliación con hipersuperficies de tipo espacial (siguiendo el proceso de descomposición

3 + 1 prescripto por Arnowitt - Dessler y Misner [Arnowitt, Dessler y Misner 1962]). De esta manera se puede seguir la evolución de la métrica y los campos acoplados a ella, con una definición adecuada de tiempo, en la forma estándar.

Un hecho interesante es que se puede mostrar que las ecuaciones de Einstein admiten una formulación en términos de *condiciones iniciales*, las cuales determinan en forma unívoca la evolución de la métrica (a menos de transformaciones de medida o “gauge”). A su vez, las soluciones admiten un *criterio de estabilidad de Cauchy* el que establece que las mismas dependen en forma continua de las condiciones iniciales [Misner, Thorne y Wheeler 1973; Wald 1984].

Si se compara la complejidad de las ecuaciones de Einstein con, por ejemplo, la ecuación de Navier - Stokes, no es sorprendente que nuestra comprensión de campos gravitatorios fuertes sea muy poca. Sin embargo, desde el punto de vista observacional son escasos los ejemplos que necesitan las ecuaciones completas, *no lineales*, de Einstein para ser explicados; en general es suficiente con la versión linealizada de las mismas. Por ejemplo, entre las tres pruebas *clásicas* de la RG, sólo la precesión de las órbitas de los planetas interiores contrasta aspectos no lineales de la teoría.

Entonces, si nuestra intención es poner de relieve aspectos no lineales de las ecuaciones de Einstein es natural probarlas en escenarios que involucren fuertes campos gravitatorios, es decir, cerca de las singularidades de curvatura. Debe observarse sin embargo que, si no se imponen algunas restricciones sobre la métrica del espacio - tiempo ( $g_{\mu\nu}(x)$ ), las ecuaciones de Einstein son imposibles de tratar, aunque ha habido avances en Relatividad Numérica [Kurki-Suonio, Laguna y Matzner 1993].

Dado que la posibilidad de comportamiento caótico ha sido investigada sólo en unos pocos ejemplos (de juguete) de espacio - tiempos métricos, hasta el presente no se sabe si es posible “producir” caos en casos genéricos. Se debe tener en cuenta, asimismo, el problema inherente a la RG al tratar de implementar indicadores estándar de caos, en particular el Espectro de Exponentes de Lyapunov, debido a que son objetos fuertemente dependientes de medida. Se aprecia claramente que esto es así, ya que la definición de los exponentes de Lyapunov involucra la noción de tiempo la cual, como dijimos, no posee sentido absoluto en RG. Por lo tanto, sería interesante desarrollar indicadores de

caos en forma invariante frente a difeomorfismos del espacio - tiempo [Rugh 1994]. En este contexto, las secciones de Poincaré son una herramienta especialmente valiosa al investigar sistemas dinámicos covariantes, como es el caso de la RG, en la medida que proveen información topológica (y por ende invariante de medida), sobre la dinámica.

Entonces, como hemos dicho, la RG es una teoría no lineal que describe adecuadamente la interacción gravitatoria y puede ser abordada desde la perspectiva de la TSD. Si bien en muchos problemas Astrofísicos es suficiente utilizar una aproximación lineal de la misma, y en ocasiones incluso basta con la descripción Newtoniana, su aplicación es ineludible cuando el campo asociado es muy intenso, tal como ocurre en el Universo Primitivo. Por lo tanto, es lógico esperar que presente particularidades propias de los sistemas dinámicos no lineales, tales como: comportamiento irregular o caótico [Berry 1978; Hénon 1983] o difusión de Arnold [Arnold 1964; Holmes y Marsden 1982]. Estas características hacen sospechar fuertemente que las contribuciones no lineales podrían conducir a efectos no triviales en modelos cosmológicos del Universo Temprano.

## I-2 Cosmología como Sistema Dinámico

La investigación sobre caos aplicado a modelos cosmológicos comenzó con el trabajo de la escuela Rusa [Belinskii, Khalatnikov y Lifshitz 1970; Landau y Lifshitz 1975; Khalatnikov et al. 1985] y de Misner [Misner 1969a,b, 1970; Ryan 1972; Ryan y Shepley 1975] y colaboradores sobre caos en modelos de Bianchi IX sin materia. La versión más sencilla del modelo (Universo "Mixmaster"), fué estudiada en el régimen de aproximación a la singularidad cosmológica; comprobándose la existencia de un mapa unidimensional asociado, el cual presentaba un exponente de Lyapunov positivo. Posteriores intentos de evaluar el espectro de exponentes en la dinámica completa condujeron a resultados contradictorios [Francisco y Matsas 1988; Burd, Buric y Ellis 1990; Hobill et al. 1991; Hobill 1991; Berger 1989, 1990, 1991]. Una explicación a esta aparente contradicción ha sido dada independientemente por diversos autores [Pullin 1991, Rugh 1990], en términos de la no covariancia en la definición de los coeficientes de Lyapunov. A su vez, Bogoyavlensky [Bogoyavlensky 1985], ha utilizado métodos cualitativos de la

TSD en aplicaciones astrofísicas y cosmológicas, analizando en particular los diversos modelos de Bianchi.

Hasta la década del 70 la mejor explicación disponible sobre el origen de nuestro Universo era la teoría estándar de la gran explosión ("Big Bang") [*Peebles 1971; Weinberg 1972; Misner, Thorne y Wheeler 1973; Raychaudhuri 1979*]. Esta descripción presentaba diversos inconvenientes, puesto que el modelo requería varias hipótesis muy rigurosas e inexplicadas sobre las condiciones iniciales del Universo, para que sus predicciones concordaran con las observaciones. A principio de los años 80 surgió una nueva teoría, el *Modelo Inflacionario*. Según éste, la existencia de una era inflacionaria, en la cual el Universo atravesó un período de expansión exponencial durante las primeras etapas de su evolución, provee una explicación a los problemas de isotropía, homogeneidad, chatura, etc., que se presentaban en el modelo anterior. El Universo considerado se supone isótropo y homogéneo, descrito por el modelo de Friedmann - Robertson - Walker (FRW) [*Friedmann 1922; Robertson 1935, 1936 a, b; Walker 1936*], y toda la materia contenida en él se representa por un campo escalar. Así, es posible mostrar que en estos modelos, a partir de casi cualquier condición, el Universo evoluciona hasta el estado que, por hipótesis, debe tomarse como inicial en el modelo estándar.

Hay diversas maneras en que puede producirse la inflación, por ejemplo: inflación caótica (que no tiene que ver con la noción de caos que estamos discutiendo aquí) [*Linde 1983*],  $R^2$  (siendo  $R$  el escalar de Ricci) [*Starobinsky 1984a*], nueva [*Linde 1982*] y extendida [*La y Steinhardt 1989*]. En los modelos inflacionarios la densidad de energía total se ve dominada en algún momento por la energía potencial de un campo escalar cuántico (el inflatón). Esta energía potencial juega el rol de una constante cosmológica efectiva conduciendo a una etapa de crecimiento exponencial (inflación) del universo. Si la inflación es suficiente los problemas mencionados del modelo estándar pueden ser resueltos.

De aquí que la dinámica de campos escalares en modelos cosmológicos haya recibido mucha atención. en años recientes, como una forma de investigar estos escenarios inflacionarios en el Universo Primitivo. El requerimiento principal para que el escenario sea exitoso es que las trayectorias inflacionarias concluyan en una expansión del factor de escala  $a(t)$  del Universo del tipo ley de potencias, atravesando una etapa intermedia

oscilatoria, la cual a su vez recalienta el universo. Asimismo, para asegurarse que la inflación no es un fenómeno peculiar, lo que sería contrario al propio paradigma inflacionario, se requiere que las trayectorias inflacionarias sean atractores en gran parte del espacio de fases. El significado de “gran parte” es aún materia de debate y, probablemente, sólo pueda ser respondido dentro del marco de la Cosmología Cuántica (CC) [Padmanabhan 1989].

Los primeros trabajos sobre cosmología inflacionaria como sistema dinámico corresponden a Belinsky *et al.* [Belinsky *et al.* 1985a,b,c], quienes consideraron un universo isótropo y homogéneo y un campo escalar acoplado mínimamente ( $\xi = 0$ ) al escalar de Ricci, el potencial para este campo escalar consistía en un término de masa y otro de autointeracción del tipo  $\lambda\phi^4$ . Estos trabajos fueron, posteriormente, generalizados para acoplamiento no mínimo. En efecto, Amendola *et al.* [Amendola, Litterio y Occhinero 1990; Capozziello, Occhinero y Amendola 1993] realizaron una serie de trabajos sobre modelos inflacionarios, en particular trataron el caso de campos escalares con acoplamiento no mínimo con la gravedad ( $\xi \neq 0$ ). La idea central es estudiar las propiedades dinámicas del sistema a través de una visualización global del Espacio de Fases, puntos de equilibrio, trayectorias posibles y su estabilidad, y una identificación de las regiones relevantes para la evolución del sistema (en particular las regiones inflacionarias). En el primero de dichos trabajos [Amendola, Litterio y Occhinero 1990], se estudia el problema con mucha generalidad, utilizando un término de autointeracción del tipo  $\lambda\phi^{2n}/2n$  y considerando diversos valores de los parámetros  $\xi$  y  $n$ . Sin embargo, el análisis se efectúa a través del Potencial Efectivo en el caso de curvatura espacial nula ( $k = 0$ ) y los universos abierto y cerrado (con  $k = -1$  y  $k = +1$  respectivamente) se analizan sólo en el límite asintótico (es decir,  $a(t)$  grande), donde los efectos de la curvatura espacial son despreciables. En todos los casos se encuentran regiones inflacionarias en el Espacio de Fases.

Similares resultados fueron encontrados por Futamase y Maeda [Futamase y Maeda 1989], aunque sin utilizar el esquema del Espacio de Fases y dentro del contexto de inflación caótica. Concretamente, en su modelo es posible que se desarrolle una etapa inflacionaria si  $\xi$  es negativo o suficientemente pequeño ( $\xi \leq 10^{-3}$ ). Simultáneamente

Futamase *et al.* [Futamase, Rothman y Matzner 1989] extendieron este análisis considerando modelos de Bianchi anisótropos con acoplamiento mínimo y no mínimo, y suponiendo que el campo escalar continuaba siendo homogéneo. En el primer caso la posibilidad de inflación se veía favorecida; en el segundo la inflación no sería suficiente, para curar los problemas del modelo estándar, si  $\xi \geq 10^{-2}$ .

Por otra parte, al estudiar las etapas más primitivas de evolución del Universo se debe tener en cuenta que el mismo se encontraba a muy altas temperaturas y, en el tratamiento completo de estos problemas, los campos de materia deben tratarse cuánticamente. En general el formalismo puede resultar poco consistente, al superponer efectos cuánticos y relativistas, si no se recurre al marco que los unifica naturalmente, la Teoría Cuántica de Campos en el Espacio Tiempo Curvo (TCCETC) [Birrel y Davies 1982]. Así, para poder estudiar rigurosamente el Universo Inflacionario se debe formular el modelo dentro de la aproximación semiclásica. En este contexto se debe considerar la necesidad de renormalizar las ecuaciones a fin de cancelar las cantidades divergentes que aparecen, como es usual en toda teoría de campos. Asimismo, hay que tener en cuenta la aparición de efectos disipativos, asociados a la creación cosmológica de partículas. Estas particularidades están relacionadas con la presencia de términos no lineales en las ecuaciones del modelo, por ejemplo: en la funcional de acción gravitatoria se incluyen términos cuadráticos en la curvatura para efectuar la renormalización; y sus efectos son relevantes tanto en la etapa inicial [Calzetta 1991; Calzetta y Sakellariadou 1993], como final [Mazzitelli, Paz y El Hasi 1989; Kofman, Linde y Starobinsky 1994; Shtanov, Traschen y Brandenberger 1994] del período inflacionario. En particular, los efectos disipativos son cruciales para “consumir” la energía del campo del inflatón, conduciendo al final de la etapa inflacionaria.

### I-3 Plan de Tesis

Nuestra intención es extender los trabajos mencionados previamente, estudiando la existencia de comportamiento irregular o caótico cerca de la singularidad cosmológica, y las posibles consecuencias que esto tendría en la evolución subsecuente del Universo

Primitivo. Se estudiará, por lo tanto, la evidencia, tanto analítica como numérica, de comportamiento caótico en modelos cosmológicos consistentes en un Universo de Friedmann - Robertson - Walker acoplado a un campo escalar real. Si bien estos modelos son demasiado simplificados para ser considerados realistas, es esto mismo lo que los hace útiles para estudiar las posibles implicancias del caos en cosmología, tanto a nivel clásico como semiclásico y cuántico.

En el capítulo II se estudia el modelo más sencillo, consistente en un Universo de FRW acoplado conformemente a un campo escalar, real y masivo. Luego de un sencillo estudio analítico, en busca de indicios de comportamiento irregular, se calculan los *Exponentes de Lyapunov*, tanto en la región regular como en la caótica. Debido a que la noción de exponente de Lyapunov no posee sentido absoluto en RG, habiendo despertado fuertes controversias al aplicarse en el estudio del modelo de Bianchi IX, buscamos una caracterización independiente del comportamiento dinámico; para ello se construyen las *Secciones de Poincaré* en una región, elegida adecuadamente, del espacio de fases. Posteriormente se analiza la posibilidad de observar el *caos* durante la evolución del Universo.

En el capítulo III se extiende el modelo anterior, considerando un potencial más general para los campos, incluyendo términos de constante cosmológica y autointeracción del campo escalar. Como forma de construir un esquema general del espacio de fases se buscan e identifican los puntos de equilibrio (o fijos) del sistema, la mayoría de los cuales se hallaban en el infinito en el modelo del capítulo precedente. Se estudia luego la estabilidad lineal de los mismos y su relación con el comportamiento global del sistema. Debido a que el comportamiento dinámico es más interesante en las regiones resonantes, se utilizará el método de los *Diagramas Frecuencia - Frecuencia*, para identificar las condiciones iniciales más próximas a las regiones resonantes y, a partir de un entorno de aquéllas, se construyen las secciones de Poincaré.

Posteriormente, en el capítulo IV, consideraremos una situación particular del ejemplo anterior, donde es posible identificar una parte no perturbada de la dinámica total, que puede integrarse exactamente; quedando dividido el espacio de fases por una separatriz. Veremos que, dentro de la separatriz tendremos Universos que recolapsan y fuera soluciones del tipo DeSitter [*DeSitter 1917a,b*]. Aplicando el método de la *Integral de*

Melnikov [Guckenheimer y Holmes 1983] mostraremos cómo, añadiendo contribuciones no integrables, la separatriz se rompe, dando lugar a una capa estocástica, y trayectorias inicialmente confinadas escapan aproximándose a la solución inflacionaria. Incluyendo el primer modo no homogéneo del campo tendremos un sistema de tres grados de libertad y la posibilidad de investigar el fenómeno conocido como *Difusión de Arnold*, de esta manera veremos que ciertas órbitas, aún cuando se originen por debajo de la separatriz pueden conducir a inflación.

El capítulo V es una extensión cuántica de los modelos analizados previamente, y aplicación de la TCCETC a un modelo cosmológico sencillo. Analizaremos el final de la era inflacionaria, período denominado recalentamiento (“reheating”) y mostraremos que las técnicas usuales de TCCETC pueden utilizarse en cosmología para resolver el modelo en forma autoconsistente. Asimismo, veremos que la existencia de resonancias, entre los distintos grados de libertad del sistema, conduce a efectos dinámicos sumamente interesantes; tales como la creación de partículas y la disipación de la energía del campo responsable de la inflación.

Finalmente, en las conclusiones, se analizan los resultados obtenidos y se discuten las perspectivas futuras.

En síntesis, estudiaremos exhaustivamente la influencia de los términos no lineales sobre la regularidad de las soluciones de las ecuaciones de campo, que surgen en modelos cosmológicos clásicos, implementando diversas técnicas y métodos de aplicación usual en TSD. Asimismo, veremos cómo efectuar la transición a modelos semiclásicos en forma consistente, y una primera indicación de comportamiento irregular dentro de esta aproximación.



## CAPÍTULO II

### CAOS EN UNA COSMOLOGÍA SENCILLA

Buscaremos, analítica y numéricamente, evidencia de comportamiento caótico en un modelo cosmológico consistente en un Universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), espacialmente cerrado, conformemente acoplado a un campo escalar, real y masivo. Éste es el modelo cosmológico más sencillo con acoplamiento no trivial entre la métrica y un campo. Veremos que, vía un adecuado cambio de variables, es posible estudiar exhaustivamente el problema numérico, al remover las singularidades matemáticas que aparecen usualmente asociadas a la singularidad cosmológica. Si bien es demasiado simplificado para ser considerado realista, es ésto mismo lo que lo hace útil para estudiar las posibles implicancias de la dinámica no lineal en cosmología, tanto a nivel clásico como semiclásico y cuántico. Asimismo, su sencillez hace posible que pueda ser estudiado numéricamente con técnicas estándar permitiéndonos mostrar, hasta donde sabemos, las primeras Secciones de Poincaré que se obtuvieron en un modelo cosmológico.

El ejemplo que consideraremos satisface la noción de sistema casi integrable [Tabor 1989], es decir, un sistema integrable que se vuelve no integrable por efecto de una perturbación. En estos tipos de sistemas lo que suele ocurrir es que la dinámica no perturbada exhibe un punto fijo inestable, asintóticamente unido a sí mismo por una órbita no trivial (denominada "lazo homoclínico"); típicamente esto corresponde a una separatriz, en el espacio de fases, entre distintos tipos de movimiento posibles del sistema. Si el lazo es destruido por la perturbación en su entorno se forma una "capa estocástica" [Chirikov 1979; Reichl y Zheng 1987].

Descomponiendo el Hamiltoniano de nuestro sistema en una parte integrable más una perturbación, veremos que el modelo que estamos analizando corresponde a una situación algo diferente, ya que no hay puntos homoclinicos en la dinámica no perturbada. Sin embargo, en cierto sentido, la perturbación crea y luego destruye los lazos

homoclínicos, permitiendo la formación de la capa estocástica. La ruta al caos resulta de la superposición de diversas resonancias entre la perturbación externa y el movimiento no perturbado. En el entorno de una región resonante en el espacio de fases una de las resonancias domina al resto; debido a esta resonancia dominante los toros KAM [Kolmogorov 1957; Arnold 1963; Moser 1962] de esta región son destruidos. En particular el toro para el cual la resonancia es exacta desaparece, dejando tras de sí un conjunto alternado de puntos estables e inestables [Arnold y Avez 1968]. Los puntos inestables están conectados uno al otro a través de órbitas doblemente asintóticas o separatrices; el caos se produce cuando las separatrices se rompen, a su vez, debido al efecto de resonancias secundarias. De tal manera, el comportamiento caótico, bajo la forma de extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, se despliega en un conjunto de medida no nula alrededor de la separatriz, la "capa estocástica".

Luego de un breve estudio analítico, presentaremos los resultados de la integración numérica de las ecuaciones de movimiento completas, tanto en el régimen caótico como en el no caótico; estimaciones numéricas de los exponentes de Lyapunov [Benettin et al. 1980; Wolf et al. 1985] en la capa estocástica; secciones de Poincaré, mostrando las regiones regulares y estocásticas en el espacio de fases; como así también gráfico de valores del campo en el colapso gravitatorio ("big crunch") contra los valores correspondientes en el "big bang", para una geometría inicial fija, para mostrar la pérdida de predictibilidad subsecuente al caos.

## II-1 El modelo

Comenzaremos introduciendo el modelo y mostrando como su Hamiltoniano se puede dividir en una parte no perturbada más una perturbación. Como ya se discutió, supondremos una geometría de FRW espacialmente cerrada, esto es, un elemento de línea

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] , \quad (II.1)$$

donde  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \chi \leq \pi$ , y  $\eta$  corresponde al tiempo “conforme”. Por simplicidad, consideraremos sólo modelos que comienzan en una singularidad cósmica, es decir, nos restringiremos a  $\eta$  positivo, con  $a(0) = 0$ . Para analizar las propiedades dinámicas del sistema supondremos que después del “Big Crunch” (esto es, cuando  $a$  vuelve a 0), comienza un nuevo ciclo cosmológico, ahora con  $a \leq 0$ . Por lo tanto, una órbita periódica completa, en el espacio de fases, describe el nacimiento y la muerte de dos Universos.

La dinámica gravitatoria está descripta por la acción de Einstein - Hilbert,

$$S_g = m_p^2 \int d^4x \sqrt{-g} R . \quad (\text{II.2})$$

Donde la raíz cuadrada del determinante de la métrica es  $\sqrt{-g} = a^4 \sin^2 \chi \sin \theta$ , y el escalar de curvatura está dado por:

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a^3} + \frac{1}{a^2} \right] , \quad (\text{II.3})$$

(utilizaremos siempre la convención de MTW [Misner, Thorne y Wheeler 1973]). Un punto representa derivada con respecto a  $\eta$  y  $m_p$  es la masa de Planck. Por simplicidad, supondremos que  $m_p = \sqrt{1/12v}$ , donde  $v = 2\pi^2$  es el volumen conforme de la sección espacial.

La acción para un campo escalar, real, masivo, conformemente acoplado está dada por:

$$S_f = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + (m^2 + 1/6)R\Phi^2] , \quad (\text{II.4})$$

siendo  $m^2$  la masa del campo. Por consistencia con la simetría de la geometría de fondo consideraremos un campo homogéneo. Después de parametrizar el campo como  $\Phi = o/v^{(1/2)}a$ , efectuando las integrales espaciales y despreciando derivadas totales, en

(II.2) y (II.4); obtenemos un sistema dinámico con sólo dos grados de libertad  $a$  y  $\phi$  y Hamiltoniano,

$$H = \left(\frac{1}{2}\right)[-(\pi^2 + a^2) + (p^2 + \phi^2) + m^2 a^2 \phi^2] , \quad (\text{II.5})$$

donde  $\pi$  y  $p$  son los momentos canónicamente conjugados a  $a$  y  $\phi$  respectivamente. (La dinámica cerca del origen de un Hamiltoniano similar a sido estudiada por Kummer [Kummer 1978], aunque dentro de un contexto puramente matemático). En este punto debemos recordar que, debido a que hemos abandonado la libertad de medida al escribir el elemento de línea como en la Ec.(II.1), hemos perdido una de las ecuaciones de Einstein: el vínculo Hamiltoniano [Misner, Thorne y Wheeler 1973]. Reintroduciremos este vínculo como una restricción sobre los valores permitidos en las condiciones iniciales

$$H = 0 . \quad (\text{II.6})$$

Es fácil ver que este vínculo es respetado por la evolución dinámica del sistema.

Las ecuaciones de movimiento que se derivan del Hamiltoniano de la Ec.(II.5) son:

$$\dot{\phi} = p , \quad (\text{II.7a})$$

$$\dot{a} = -\pi , \quad (\text{II.7b})$$

$$\dot{p} = -(1 + m^2 a^2) \phi , \quad (\text{II.7c})$$

$$\dot{\pi} = (1 - m^2 \phi^2) a . \quad (\text{II.7d})$$

Es de destacar que las mismas, como así también el vínculo Hamiltoniano Ec.(II.6), no presentan singularidades matemáticas a medida que nos aproximamos a la singularidad cosmológica  $a = 0$  (esto se debe a la parametrización que se hizo del campo escalar y a haber elegido el acoplamiento conforme; es decir, el factor  $\xi = 1/6$  en la Ec.(II.4)). En efecto, las ecuaciones de movimiento pueden utilizarse para proyectar las soluciones más allá de la singularidad, en lo que podría ser considerado un Universo diferente. En

nuestra discusión de caos seguiremos el comportamiento de las soluciones a través de varios de estos ciclos cósmicos: sin embargo, más adelante, discutiremos brevemente las implicancias del caos para un observador confinado a un solo Universo.

Cuando  $m^2 = 0$  este sistema de ecuaciones es obviamente integrable, correspondiendo a dos osciladores armónicos desacoplados ambos de frecuencia unidad. Para  $m^2$  no nulo, esto ya no es obvio y se deben aplicar métodos perturbativos [Calzetta y El Hasi 1999], o resolver la dinámica numéricamente, como haremos en breve. Notemos mientras tanto que, si bien la solución para el campo  $\phi$  todavía corresponde a la de un oscilador, aunque de frecuencia variable, el comportamiento de  $a$  puede ser muy distinto dependiendo del valor de  $m^2 \phi^2$ . En efecto, existen 3 tipos de soluciones: movimiento oscilatorio, crecimiento lineal o divergencia exponencial del factor de escala. Obviamente, la división entre los distintos tipos de trayectorias no es absoluta, debido al acoplamiento de las ecuaciones. Así, un fuerte crecimiento de  $a$  fuerza al campo  $\phi$  a oscilar más rápidamente, con lo cual aquél cae nuevamente en el régimen oscilatorio. Vemos, entonces, que  $\phi^2 \simeq 1/m^2$  corresponde a la frontera de una zona de inestabilidad, siendo la propia dinámica del modelo la que hace que sea posible que el sistema pase de una región a otra en forma totalmente impredecible.

## II-2 Análisis de la Dinámica

Es tentador considerar el Hamiltoniano no masivo como el no perturbado, con el último término en la Ec.(II.5) como la perturbación. Esto es cuestionable, no obstante, sobre la base de que para Universos “macroscópicos”, se puede obtener muy fácilmente  $m^2 a^2 \gg 1$ . Por ejemplo, para nuestro Universo actual  $a \sim 10^{60}$ , y para una masa de 1 eV, obtenemos  $m \sim 10^{-28}$ , así  $ma \sim 10^{32}$ . En este régimen, el último término en (II.5) de ninguna manera es pequeño comparado con los otros.

Procederemos de forma diferente. Observemos que, si la evolución de  $a$  es lenta comparada con las oscilaciones del campo  $\phi$ , entonces su principal efecto es producir un cambio adiabático en la frecuencia de éste. Introduciremos por lo tanto la amplitud y fase “adiabáticas”  $j$  y  $\varphi$ :

$$\phi = \sqrt{\frac{2j}{\omega}} \sin \varphi , \quad (\text{II.8})$$

$$p = \sqrt{2\omega j} \cos \varphi . \quad (\text{II.9})$$

Donde  $\omega^2 = 1 + m^2 a^2$  es la frecuencia instantánea del campo. Esta transformación es canónica, por ejemplo puede efectuarse a través de la función generatriz:

$$S_1 = Pa + \left( \frac{\omega \phi^2}{2 \tan \varphi} \right) . \quad (\text{II.10})$$

Pero, debido a la dependencia de  $a$  con  $\omega$ , nos vemos forzados a cambiar el momento geométrico de  $\pi$  a  $P$ , de acuerdo a:

$$\pi = P + \frac{m^2 c j}{2(1 + m^2 a^2)} \sin 2\varphi . \quad (\text{II.11})$$

Ahora sustituimos las nuevas variables en el Hamiltoniano y lo reescribimos como,

$$H = -(H_0 - \delta H) , \quad (\text{II.12})$$

donde el Hamiltoniano no perturbado,

$$H_0 = \left( \frac{1}{2} \right) [P^2 + a^2] - j \sqrt{1 + m^2 a^2} , \quad (\text{II.13})$$

es obviamente integrable ( $H_0$  y  $j$  son constantes de movimiento en involución [Arnold 1978]), y la perturbación,

$$\delta H = \frac{m^2 a P j}{2(1 + m^2 a^2)} \sin 2\varphi + \left[ \frac{m^2 a j}{2(1 + m^2 a^2)} \right]^2 (1 - \cos 4\varphi) , \quad (\text{II.14})$$

permanece pequeña tanto para Universos pequeños como para grandes.

Observemos que el Hamiltoniano no perturbado  $H_0$  corresponde al de una partícula sometida al potencial:

$$U_{ef} = \frac{a^2}{2} - j\sqrt{1 + m^2 a^2} . \quad (\text{II.15})$$

La dinámica de esta partícula es obviamente ligada. Asimismo, es fácil ver que, el punto  $a = 0$  es un punto fijo; estable si  $m^2 j \leq 1$ , e inestable en cualquier otro caso. Si  $m^2 j \geq 1$  aparecen otros dos puntos fijos (mínimos locales respecto de  $a = 0$ ), para  $a = \pm \sqrt{[(m^2 j)^2 - 1]/m^2}$  (ver Fig.1). En este segundo caso hay un lazo homoclínico asociado al punto fijo central. Sin embargo, esta órbita no satisface el vínculo Hamiltoniano, Ec.(II.6), pues sobre ella tenemos que  $H_0 = -j$ , es decir, pertenecen a otra hoja de energía en el espacio de fases. Es posible mostrar, sin embargo, que su presencia afecta el comportamiento del sistema al considerar los términos perturbativos [Calzetta y El Hasi 1993].

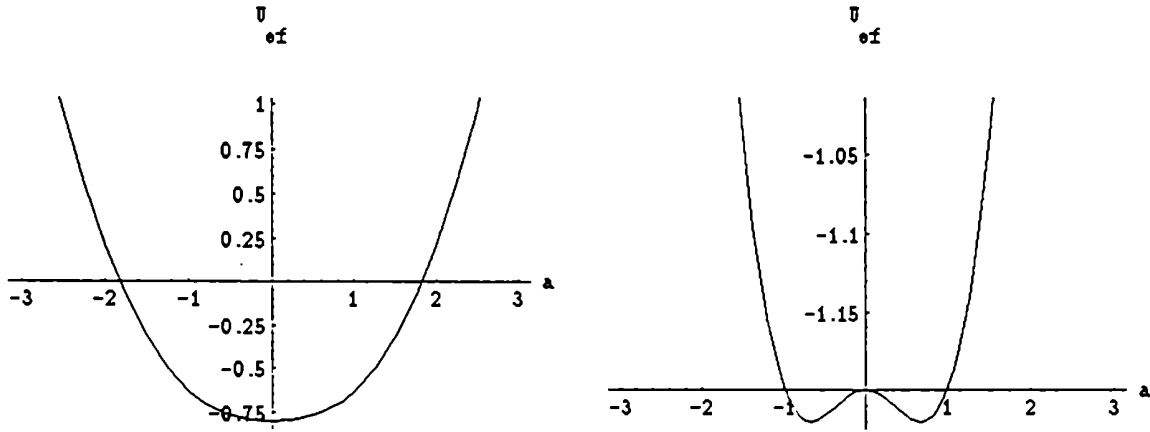


Figura 1. Cambio en el potencial efectivo al variar la magnitud  $m^2 j$ . a)  $U_{ef}$  correspondiente a una situación 'estable' ( $m^2 j = 0.8$ ). b)  $U_{ef}$  para una situación 'inestable' ( $m^2 j = 1.2$ ).

Por otra parte, es posible ver que la dinámica no perturbada posee una torre infinita de resonancias. Para ello, tomemos el valor medio temporal de la Ec.(II.13),

$$h = \langle H_0 \rangle = \langle \frac{P^2 + a^2}{2} \rangle - \langle j \sqrt{1 + m^2 a^2} \rangle \quad (\text{II.16})$$

$$\simeq K - j \sqrt{1 + m^2 \langle a^2 \rangle} \quad ,$$

(siendo  $K \sim (P^2 + a^2)/2$ ), si aproximamos la dinámica de  $a$  por la de un oscilador armónico, la aplicación directa del teorema del virial conduce a:

$$h \simeq K - j \sqrt{1 + m^2 K} \quad . \quad (\text{II.17})$$

Así,

$$\Omega_K = \frac{\partial h}{\partial K} = 1 - \frac{m^2 j}{2\sqrt{1 + m^2 K}} \quad (\text{II.18a})$$

y

$$\Omega_j = \frac{\partial h}{\partial j} = -\sqrt{1 + m^2 K} \quad . \quad (\text{II.18b})$$

Para ubicar las resonancias observemos primero que de los dos términos perturbativos en (II.14), el primero es el dominante para todo  $a$  salvo cerca de los puntos de retorno del Hamiltoniano  $H_0$  (cf. Ec.(II.13)), por lo tanto asumiremos que a orden más bajo es suficiente considerar resonancias de la forma  $2\Omega_j = -N\Omega_K$ . Recordando que el vínculo Hamiltoniano exige

$$j \simeq \frac{K}{\sqrt{1 + m^2 K}} \quad . \quad (\text{II.19})$$

se llega a la ecuación:



$$2\sqrt{1+m^2K} - N[1 - \frac{m^2K}{2(1+m^2K)}] = 0 , \quad (\text{II.20})$$

Esta ecuación tiene solución exacta para  $K$  en términos de  $N$  o, lo que es lo mismo, nos permite determinar los valores de  $m^2j$  (cf. Ec.(II.19)) que corresponden a resonancias del sistema no perturbado. Esto se muestra en la Fig.2; las dos primeras resonancias ( $N = 1, 2$ ), no tienen sentido físico, pero la siguiente ( $N = 3$ ) con un valor de  $m^2j \simeq .43$  está relativamente cerca del valor  $m^2j = 1$ , que habíamos visto correspondía al límite de estabilidad del sistema. Sin embargo, al analizar las secciones de Poincaré, veremos que estas estimaciones son demasiado conservativas y los toros KAM son destruidos bastante antes de esta primera resonancia.

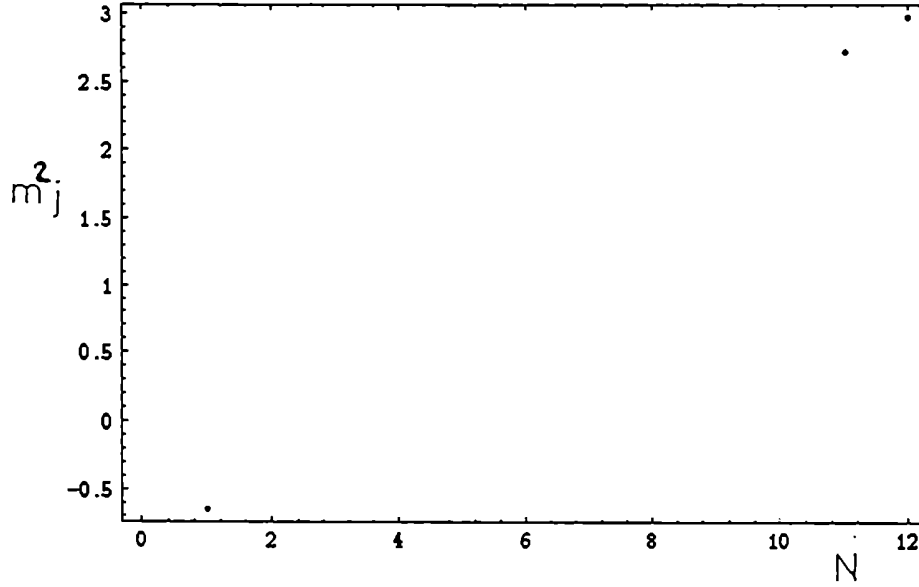


Figura 2. Valores de  $m^2j$  para resonancias aproximadas del sistema.

Por otra parte, es interesante observar que, para valores grandes de  $N$ , se verifica que  $m^2j \sim N$ ; esto indica que las resonancias deberían extenderse a todo el espacio de fases y así, en principio, no deberían observarse regiones regulares más allá del último toro conservado.

## II-3 Tratamiento numérico del modelo

Como dijimos, resolveremos ahora el problema numéricamente. para determinar si los indicios de comportamiento "extraño". discutidos en la sección precedente, pueden ser confirmados. En nuestro trabajo hemos utilizado las variables "físicas" ( $a, \pi, \phi, p$ ), cuyas ecuaciones de evolución son las (II.7); la simplicidad de estas ecuaciones hace que esta elección sea más conveniente que otras alternativas más sofisticadas.

Someteremos, entonces, nuestro sistema a una serie de experimentos numéricos con intención de develar sus propiedades dinámicas. Para empezar, debemos recordar que el problema de resolver un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODE), no se satisface simplemente al dar las ecuaciones. Al atacar el problema numéricamente suele ser más crucial, al elegir el método de integración, considerar adecuadamente la naturaleza de las condiciones de contorno. Estas son relaciones algebraicas sobre los valores de las funciones. En general, se pueden satisfacer en puntos discretos especificados, pero no se mantienen entre los puntos, es decir, las ecuaciones diferenciales no las preservan automáticamente. Por otra parte, las condiciones de contorno se dividen en dos grandes tipos: i) problema de valores iniciales, ii) problema de valores en dos puntos del contorno. En este caso, estamos ante un problema del primer tipo. Además, dado que la RG es una teoría con vínculos, que aquí se reducen al vínculo Hamiltoniano, tenemos una relación entre las variables que debe ser satisfecha para todo tiempo, incluso en el instante inicial.

Para resolver el modelo utilizamos una rutina IMSL, llamada DVERK, obtenida de una librería Vax-Fortran y adaptada para ser implementada sobre una PC 486 IBM compatible o una WorkStation SPARC 10 del tipo SUN. El método de resolución corresponde a un Runge Kutta-Verner [McCracken y Dorn 1964; Press et al. 1992] de 5<sup>to</sup> orden. Utilizamos la rutina Runge Kutta por practicidad, comprobando que la misma funciona adecuadamente en la medida que el recinto de integración permanezca acotado. No hemos impuesto el vínculo Hamiltoniano directamente, sino que lo hemos monitoreado permanentemente como comprobación de que la rutina de integración trabajaba en forma adecuada, interrumpiendo la ejecución del programa si el Hamiltoniano excedía

un umbral de  $1 \cdot 10^{-10}$ , que tomamos como cero a los efectos prácticos. Por simplicidad usamos  $m = 1$  en todas partes, salvo al calcular las secciones de Poincaré donde utilizamos  $m = 0.8$ .

Las Figuras 3 y 4 muestran la evolución de un “Universo típico” (con condiciones iniciales dadas por:  $\phi_i = 0$ ,  $a_i = 0$ ,  $p_i = 2$  y  $\pi_i = -2$ ). La Fig.3 muestra la evolución del factor de escala y la Fig.4 la del campo.

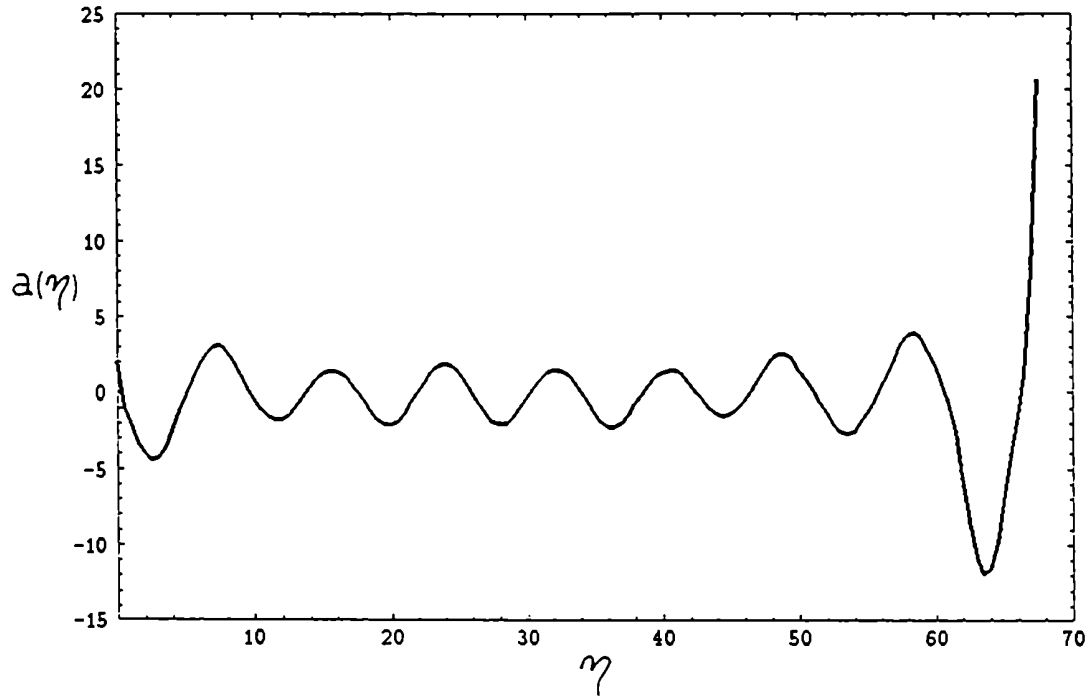


Figura 3. Evolución del factor de escala para una cosmología caótica ( $\phi_i = 0$  y  $\pi_i = -2$ ). Obsérvese el fuerte incremento de  $a$  luego de varias oscilaciones.

La no linealidad es claramente visible, junto con un fuerte incremento de la amplitud asociada al radio del Universo, hacia el final del gráfico. Obsérvese el cambio simultáneo en la frecuencia de las oscilaciones del campo, forzando de esta forma que  $\alpha$  permanezca acotado. Para condiciones iniciales dentro de la región regular se verifica que el comportamiento de ambas variables es similar al de dos osciladores armónicos desacoplados; mientras que, por el contrario, los efectos anarmónicos se acentúan si se va a valores más grandes de los campos.

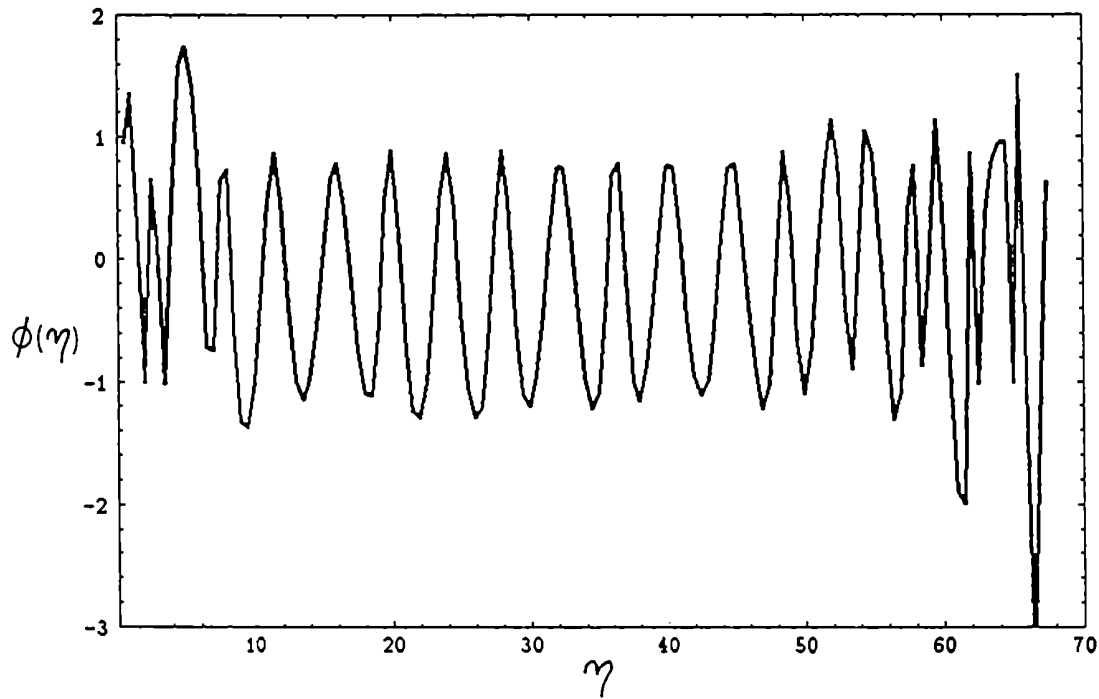


Figura 4. Evolución del campo  $\phi$  correspondiente a las condiciones iniciales de la Fig.3. Se aprecia claramente el cambio de frecuencia al crecer  $\alpha$ .

En general, todas las simulaciones en la región irregular terminaron al excederse el umbral impuesto sobre la conservación del Hamiltoniano. Esto es atribuible a una suerte de "cambio dinámico de topología", al crecer fuertemente alguna variable del sistema; se ve claramente que el modelo que se deriva de la Ec.(II.5), para valores suficientemente grandes de  $\phi$ , se puede interpretar como un Universo abierto, con una

constante de Newton efectiva (dependiente de  $\phi$ ), más un campo escalar no masivo y no interactuante. Las consideraciones precedentes hacen suponer que la estabilidad de las soluciones se reciente, lo que sumado a errores numéricos lleva a que el vínculo no pueda ser satisfecho.

A continuación someteremos nuestro modelo a una serie de experimentos numéricos, rastreando señales de comportamiento — antes que complicado — caótico. Con este fin estudiaremos sus exponentes de Lyapunov, las secciones de Poincaré y finalmente la relación entre los valores del campo en dos cruces por cero, consecutivos, del radio del Universo.

### *II.3.a - Espectro de Exponentes de Lyapunov*

Una característica importante del comportamiento caótico es la gran sensibilidad del movimiento a las condiciones iniciales. Se verifica que trayectorias inicialmente muy cercanas divergen exponencialmente, mientras que las trayectorias regulares se separan sólo linealmente con el tiempo. (Notemos que, por supuesto, esta divergencia no se mantiene por siempre en la medida que el espacio de fases sea acotado). En ese sentido, los exponentes de Lyapunov son extremadamente útiles para caracterizar el comportamiento de sistemas dinámicos en general, no estando restringido su uso a sistemas Hamiltonianos. Para ver como se implementa el método supongamos un sistema autónomo gobernado por las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{II.21})$$

Si linealizamos las ecuaciones alrededor de una órbita de referencia  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  obtenemos la aplicación tangente.

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \delta x_j \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t)}. \quad (\text{II.22})$$

La norma,

$$d(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta x_i^2(t)} . \quad (\text{II.23})$$

da una medida de la divergencia de dos trayectorias próximas, es decir, de la trayectoria  $\bar{x}$  y su vecina, determinada por las condiciones iniciales,  $\bar{x}(0) + \delta x(0)$ . La tasa media de divergencia exponencial se define como:

$$\sigma = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(0) \rightarrow 0}} \left( \frac{1}{t} \right) \ln \left( \frac{d(t)}{d(0)} \right) , \quad (\text{II.24})$$

donde  $d(0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta x_i^2(0)}$ . Se puede probar que existe un conjunto de  $n$  tales cantidades  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Estos  $\sigma_i$  son los denominados *Exponentes Característicos de Lyapunov* (ECL), y pueden ser ordenados por tamaño, esto es,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_n . \quad (\text{II.25})$$

Para movimiento regular estos exponentes son nulos, dado que  $d(t)$  sólo crece linealmente, o a lo sumo algebraicamente, con el tiempo.

El cálculo efectivo de los exponentes de Lyapunov para flujos  $n$ -dimensionales es no trivial. Si la norma  $d(t)$  crece exponencialmente existe el riesgo de saturar la capacidad de la computadora. Benettin *et al.* [Benettin, Galgani y Strelcyn 1976] sugirieron un método para evitar este inconveniente. Se comienza con la norma  $d(0)$  normalizada a uno y se calcula la divergencia en algún intervalo  $\tau$ , luego de lo cual se vuelve a renormalizar a uno (ver Fig.5).

De esta forma se calcula la secuencia de cantidades:

$$d_j = \|\delta \mathbf{x}^{(j-1)}(\tau)\| . \quad (\text{II.26})$$

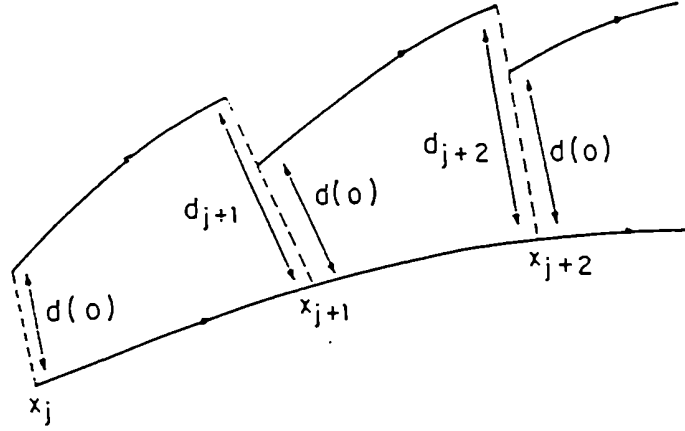


Figura 5. Cálculo del mayor exponente de Lyapunov. Luego de cada período  $\tau$  la distancia respecto de la trayectoria testigo es reajustada (Tabor 1989).

donde  $\|\cdot\|$  indica la norma Euclídea, y

$$\dot{\delta x}^{(j)}(0) = \frac{\delta x^{(j-1)}(\tau)}{d_j} , \quad (\text{II.27})$$

$\delta x^{(j)}(\tau)$  se calcula de la Ec.(II.22), con el valor inicial  $\delta x^{(j)}(0)$ , a lo largo de la trayectoria de referencia  $\bar{x}$  desde  $\bar{x}(j\tau)$  hasta  $\bar{x}((j+1)\tau)$ . Por analogía con la Ec.(II.24), se define:

$$\sigma_N = \frac{1}{N\tau} \sum_{j=1}^N \ln d_j . \quad (\text{II.28})$$

Para  $\tau$  no demasiado grande se puede probar que el límite para  $N \rightarrow \infty$  existe y es independiente de  $\tau$ . En efecto, se puede mostrar que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \sigma_1 , \quad (\text{II.29})$$

donde  $\sigma_1$  es el más grande de los exponentes. El cálculo del espectro completo de exponentes de Lyapunov requiere técnicas más sofisticadas [Bettin et al. 1980]. La

idea es construir exponentes de Lyapunov “locales” tomando el promedio temporal del logaritmo de los autovalores del operador de evolución linealizado. Mientras que estos exponentes de Lyapunov “locales” muestran un marcado comportamiento transitorio en escalas de tiempo pequeñas, se aproximan a los verdaderos exponentes de Lyapunov a medida que el tiempo tiende a infinito. Una aplicación de este método, incluyendo el análisis de datos experimentales, fué implementada por Wolf *et al.* [Wolf *et al.* 1985], quienes asimismo presentan un código numérico para evaluar todos los exponentes. En base a este código hemos calculado los coeficientes de Lyapunov en nuestro problema (en el Apéndice A se incluye el programa utilizado como base para todas las simulaciones, en éste y los capítulos siguientes).

Debemos tener presente que en un sistema Hamiltoniano la suma de los exponentes de Lyapunov es cero, como consecuencia del teorema de Liouville; si el sistema, además, es conservativo, entonces dos de los exponentes de Lyapunov son nulos, reflejando la invariancia de la superficie de energía y la homogeneidad del tiempo. Así, en un sistema conservativo con dos grados de libertad, como el nuestro, sólo el mayor exponente de Lyapunov aporta información significativa.

La Fig.6 muestra los gráficos del mayor exponente de Lyapunov para distintas “cosmologías”. En todos los casos las condiciones iniciales utilizadas correspondían a valores de  $\phi_i = 0$  y  $a_i = 0$ , variando  $\pi_i$  y determinando  $p_i$  a partir del vínculo Hamiltoniano. Como era de esperar, los rasgos generales son bastante similares para todos los exponentes. Se puede ver una etapa transitoria en el comienzo que, para mejorar la visualización de los gráficos ha sido recortada en algunas de las figuras. Más allá del régimen transitorio cada exponente, correspondiente a regiones irregulares, tiende claramente a un valor positivo después de varios períodos de evolución del sistema. Las oscilaciones residuales alrededor de este valor se pueden atribuir a que el método calcula sólo una aproximación local del valor verdadero. Así, el coeficiente local fluctúa en el tiempo a medida que la trayectoria pasa por distintas regiones del espacio de fases con diverso grado de estocasticidad, como así también debido a errores numéricos en la implementación del método. Dado que estos errores se acumulan, los resultados de



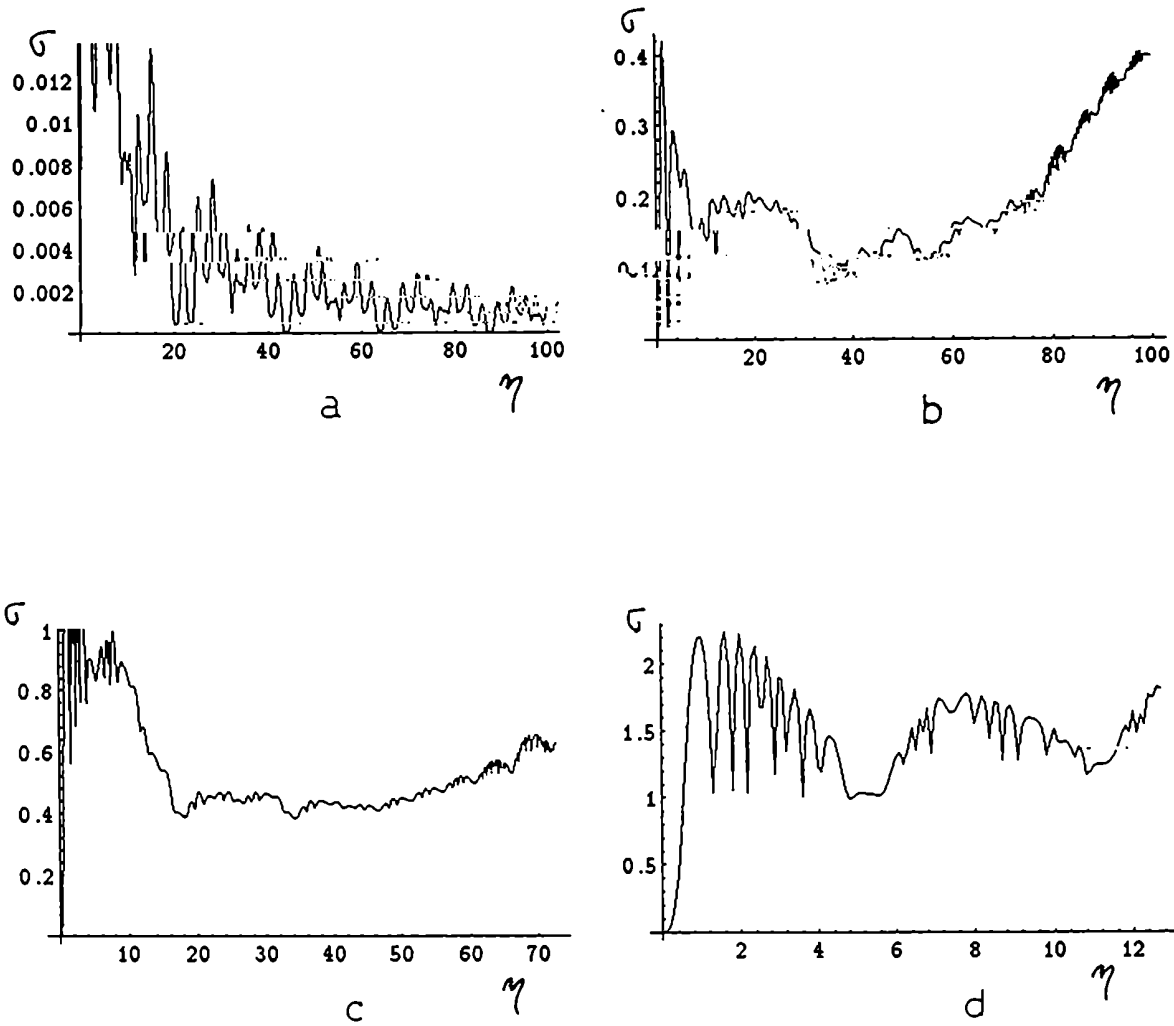


Figura 6. Exponentes de Lyapunov para distintas regiones del espacio de fases. a) El mayor exponente de Lyapunov para una región regular del espacio de fases ( $m^2 j = 0.125$ ). b) Para una región de caos 'débil' ( $m^2 j = 0.5$ ). c) Correspondiente a una región intermedia ( $m^2 j = 2$ ). d) Para una región de caos 'fuerte' ( $m^2 j = 4.5$ ).

corridas muy largas son poco confiables. El ligero incremento hacia el final de los gráficos en la distintas figuras es muy probablemente debido a este efecto y puede descartarse.

La Fig.6a (correspondiente a  $\pi_i = 0.5$  o  $m^2 j = 0.125$  en la terminología de la sección anterior) corresponde a una región regular. Obsérvese como el valor del exponente tiende lentamente a cero. La Fig.6b ( $\pi_i = 1$  o  $m^2 j = 0.5$ ) corresponde a una situación de "caos débil". El valor del exponente parece estar ligeramente por encima de  $\sigma = 0.1$ ; el crecimiento del mismo hacia el final de la corrida, se debe probablemente a que el

sistema estaba cercano a desestabilizarse — comprobamos que el Hamiltoniano estaba aproximándose al valor de  $10^{-10}$  que teníamos como cota. Notemos que este valor tan bajo de  $\sigma$  es consistente con el valor, aproximado, de la primera resonancia ( $m^2j \sim 0.43$ ) que obtuvimos en la sección anterior. En la Fig.6c ( $\pi_i = 2$  o  $m^2j = 2$ ) tenemos una situación intermedia. El exponente es aproximadamente 0.4. La simulación terminó al superar el vínculo Hamiltoniano el margen impuesto. En la Fig.6d ( $\pi_i = 3$  o  $m^2j = 4.5$ ) puede observarse que estamos en una región de “caos fuerte” con un exponente muy alto ( $\sigma \geq 1$ ) y donde el sistema se desestabiliza rápidamente.

Finalmente, en la Fig.7 se pueden comparar los cuatro exponentes. Nótese el marcado incremento de los mismos al internarnos en regiones cada vez más caóticas. Asimismo, se puede observar la fuerte variación en la escala de tiempos en la cual el sistema se vuelve impredecible.

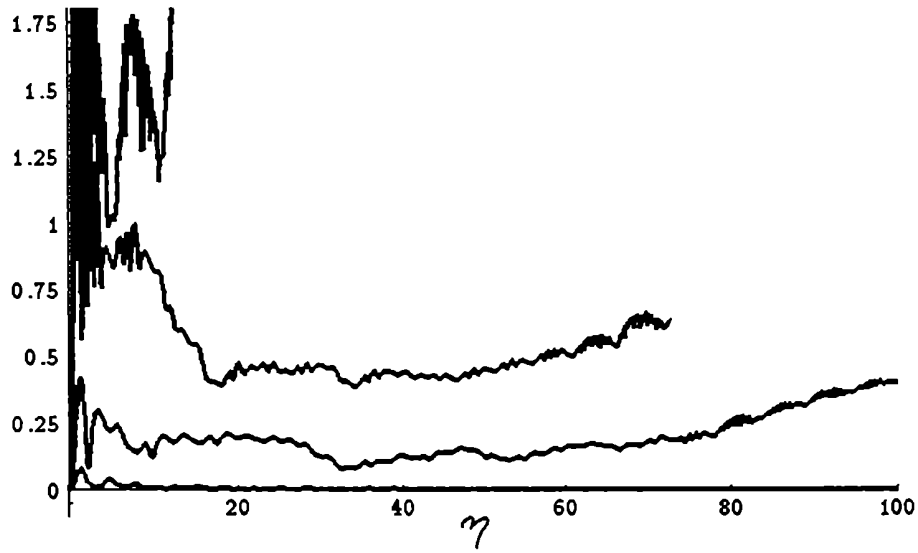


Figura 7. Comparación entre los diversos ECL mostrados en la Fig.6. Obsérvese no sólo el cambio en el valor absoluto de los mismos, sino también la variación en las escalas temporales de estabilidad.

### II.3.b - Secciones de Poincaré

A pesar de su utilidad como indicador de caos, los exponentes de Lyapunov son objetables en el estudio de problemas relativistas ya que, generalmente, dependen de la elección de medida [Burd y Tcvakol 1993]. Dicho en otras palabras, su definición es claramente dependiente del tiempo, pero el tiempo en RG es sólo una coordenada más, la cual puede redefinirse a voluntad; de tal manera, es posible efectuar un cambio en la escala temporal tal que la ley de variación de  $\sigma$  no sea exponencial. Es pues importante buscar otra forma de corroborar los resultados precedentes.

Se puede obtener información más confiable del análisis de las secciones de Poincaré. Es sabido que para un sistema Hamiltoniano conservativo, de dos grados de libertad, la superficie de energía es tridimensional, pero seguir la evolución del sistema, aún sobre esta 3-superficie de energía, es difícil; máxime cuando sólo se tiene una 2-superficie de papel para dibujar! Con el fin de obtener una visualización adecuada del movimiento, en el espacio de fases, se ha desarrollado una técnica basada en la utilización de las *Secciones de Poincaré* o *Superficies de Sección* [Poincaré 1892, Birkhoff 1927].

Una sección de Poincaré es un conjunto de puntos en los cuales una dada órbita del sistema intersecta, en una cada dirección, un plano dado en el espacio de fases. Usualmente el plano se elige fijando una de las variables, en el espacio de fases, y calculando su momento canónico conjugado a partir del Hamiltoniano conservado; el sistema resultante queda así reducido a uno de dos variables que puede graficarse con facilidad. Si denotamos las condiciones iniciales de una dada órbita sobre la sección por  $X_0$ , las intersecciones sucesivas  $X_1, X_2, \dots, X_n$  corresponden a una "aplicación" o "mapa" del movimiento sobre el plano: los tiempos entre intersecciones sucesivas no necesariamente son iguales. Si se elige una condición inicial correspondiente a una órbita que evoluciona sobre un toro, la secuencia de puntos  $X_0, X_1, X_2, \dots$  estará ubicada sobre una curva, correspondiente a la intersección del toro con la sección. Si se elige un toro donde el cociente de las frecuencias asociadas a cada grado de libertad,  $\omega_1/\omega_2$ , es irracional, se sabe que la órbita cubrirá el toro ergódicamente. Esto se manifiesta en que los puntos  $X_i$  de las sucesivas intersecciones se irán acomodando sobre una curva suave. Si, por el contrario, el cociente es racional la órbita es cerrada y habrá un número finito

de intersecciones  $X_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ), tal que  $X_0 = X_n$ , donde  $n$  está determinado por la razón  $\omega_1/\omega_2$ .

Todo sistema integrable, de dos grados de libertad, puede expresarse en términos de variables de ángulo - acción, de tal manera que el movimiento resultante en el espacio de fases ocurra sobre un toro. La pregunta que surge, casi naturalmente, es: ¿que ocurrirá con este flujo (es decir, con el conjunto de trayectorias posibles), si se somete este sistema a una perturbación externa?. La respuesta, parcial, a este interrogante la da el teorema KAM, el mismo asegura que para un Hamiltoniano integrable débilmente perturbado (con una perturbación no integrable), la mayoría de los toros se preservan. Lo anterior sugiere (aunque no prueba), que los otros toros, correspondientes a resonancias, son destruidos. De esta manera, si el movimiento es regular la sección de Poincaré se ajustará en una curva suave, mientras que esto no ocurrirá si el movimiento es irregular o caótico: en este caso los puntos de las sucesivas iteraciones parecerán “saltar al azar” sobre la sección de Poincaré. Destaquemos que el análisis de las secciones de Poincaré provee una caracterización topológica, y por lo tanto independiente de medida, del comportamiento dinámico.

En las Figuras 8-10, se exhiben las secciones de Poincaré de las trayectorias de nuestro modelo. Ellas muestran las intersecciones de las trayectorias con el plano  $\phi = 0$ , con  $p \geq 0$ . Las órbitas mostradas en estas figuras corresponden a las condiciones iniciales  $a_i = \phi_i = 0$ , con  $p$  tomando distintos valores entre 0.225 y 1.975 (el valor de  $\pi$  se determina a través del vínculo Hamiltoniano).

Todas estas órbitas corresponden al mismo valor  $m = 0.8$  de la masa del campo y sólo se ha representado el cuadrante superior derecho para que se aprecien mejor los rasgos característicos de cada figura. La Fig.8 exhibe la región  $0 \leq a \leq 20$ ,  $0 \leq \pi \leq 15$ ; nótese la fuerte dispersión de puntos correspondientes a las órbitas exteriores. La Fig.9 es una ampliación de la mancha de la esquina inferior izquierda de la Fig.8. Allí se muestra la región correspondiente a  $0 \leq a \leq 1.8$ ,  $0 \leq \pi \leq 1.5$ . Como era de esperar, las trayectorias correspondientes a  $p$  bajo, generan las secciones de Poincaré que ajustan fácilmente en las curvas suaves. En efecto, aunque algunas resonancias cercanas son visibles en el extremo inferior izquierdo de la Fig.9, éstas están siempre atrapadas entre dos toros no resonantes.

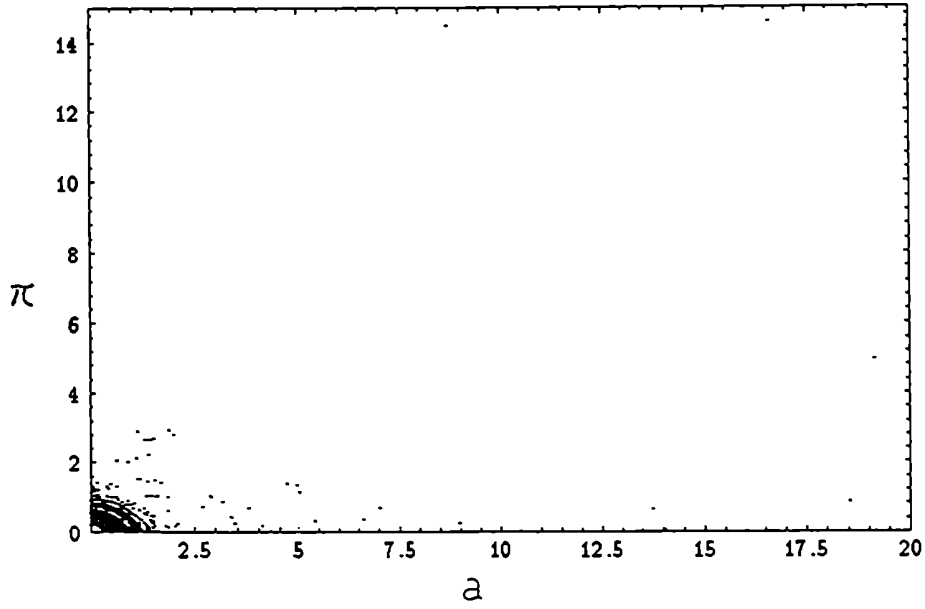


Figura 8. Sección de Poincaré para diferentes condiciones iniciales ( $a_i = \phi_i = 0$ , con  $p_i$  tomando distintos valores entre 0.225 y 1.975).

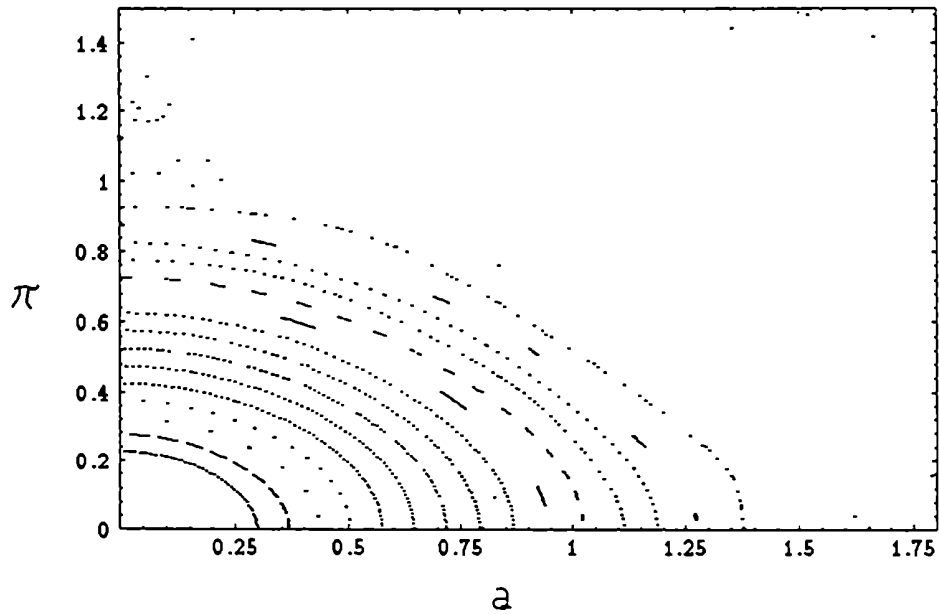


Figura 9. Ampliación de la esquina inferior izquierda de la Fig.8.

Sin embargo, a medida que el valor inicial de  $p$  se acerca a la unidad los toros resonantes comienzan a solaparse y se pierde la regularidad de las secciones de Poincaré.

La Fig.10 es una ampliación de la región resonante más externa, confinada por el último toro KAM, de la Fig.9. Se ve claramente como los toros resonantes son sustituidos por islas de estabilidad (aparecen 5 de ellas en el mapa completo), en una impactante evidencia de comportamiento caótico. El valor correspondiente de  $m^2j$  es  $\sim 0.1458$ , ligeramente por arriba de la trayectoria regular correspondiente al Lyapunov de la Fig.6a, pero bastante más bajo que nuestra estimación de la sección II.2.

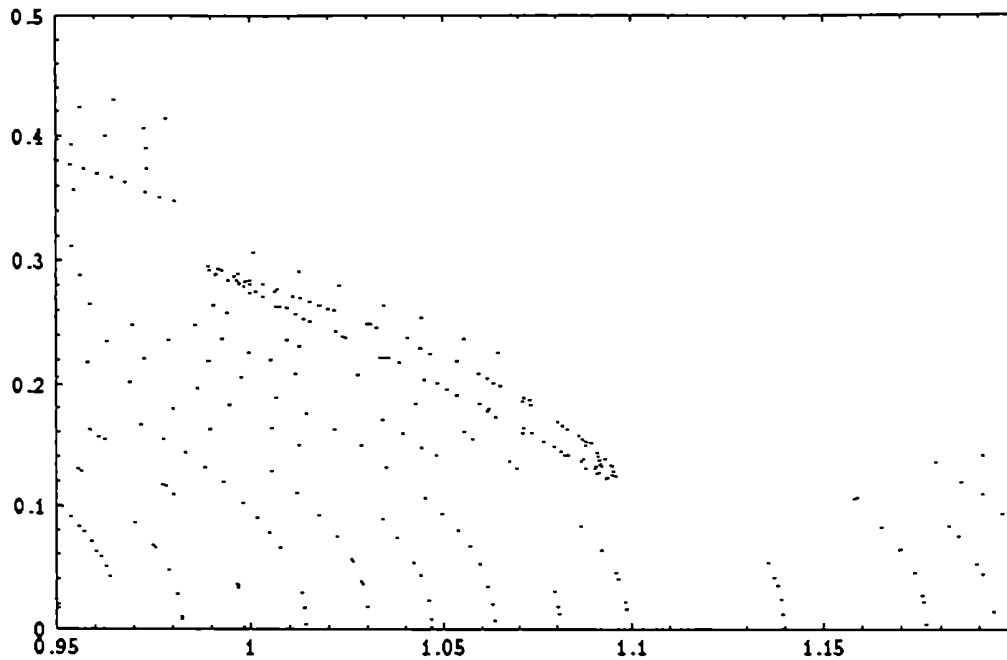


Figura 10. Isla de estabilidad que sustituye a uno de los toros rotos, correspondiente a  $m^2j \sim 0.1458$ .

### II.3.c - Predictibilidad del Caos

En el análisis numérico anterior hemos permitido que el radio del Universo cruzara varias veces por cero. Sin embargo, en el mundo "real" nuestras observaciones no pueden proyectarse más allá de la singularidad cósmica. De aquí que sea interesante determinar si la pérdida de predictibilidad en el comportamiento de las órbitas futuras es lo suficientemente fuerte como para conducir a resultados observables en un solo Universo.

Para ello, hemos analizado qué sucede con Universos que parten de la misma condición geométrica (esto es, los mismos  $a$  y  $\pi$ ), pero diferentes valores de  $\phi$  (quedando  $p$  determinado por el vínculo Hamiltoniano). Comenzamos nuestra simulación numérica en el Big Bang, finalizando los cálculos cuando  $a$  se vuelve negativo por primera vez (esto es, en el Big Crunch). Notemos que hemos elegido estos límites por conveniencia, pero el mismo análisis podría haberse hecho entre dos valores fijos cualesquiera de  $a$ .

Repitiendo este proceso varias veces se obtiene un gráfico de los valores finales del campo  $\phi_f$  contra los valores iniciales del mismo  $\phi_i$ . Para un comportamiento regular este gráfico permitiría predecir  $\phi_f$  dado  $\phi_i$  con cierta precisión. En efecto, para  $p_i$  bajo la relación entre los valores inicial y final del campo es casi lineal.

La Fig.11 muestra el resultado de un experimento numérico como el descrito correspondiente a diversas condiciones iniciales del sistema.

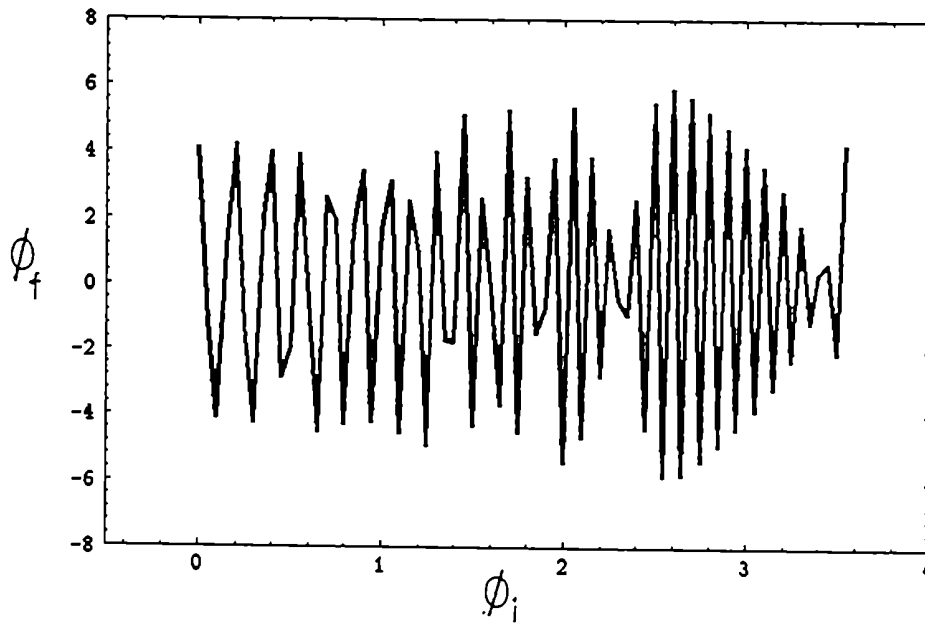


Figura 11. Campo en el big crunch versus el campo en el big bang. Las condiciones iniciales son:  $a = 0$ ,  $\pi = -5$ , con  $\phi_i$  variando entre 0 y 3.55.

Todas las simulaciones comenzaron en  $\alpha = 0$  y  $\pi = -5$ , mientras  $\phi_i$  se varió de 0 a 3.55. El resultado de las simulaciones muestra cuan difícil es predecir el valor final del campo a partir del inicial en el régimen caótico. El coeficiente de correlación entre  $\phi_f$  y  $\phi_i$ , calculado para los datos correspondientes a la Fig.11, da 0.01. Este valor tan bajo indica que  $\phi_f$  y  $\phi_i$  podrían considerarse variables estocásticas independientes.

En conclusión, nuestra simulación numérica del modelo confirma fuertemente la sospecha de comportamiento caótico en este sistema. Además, el caos impone severas limitaciones a nuestra capacidad de predecir el comportamiento futuro del Universo. aún antes de que la singularidad cósmica se alcance por primera vez.



## CAPÍTULO III

### CAOS EN COSMOLOGÍAS ISÓTROPAS Y HOMOGÉNEAS

En el capítulo precedente hemos mostrado cómo la presencia de términos no lineales en el Hamiltoniano conducen a un comportamiento irregular, o caótico, del sistema. Como dijimos, aquél era el modelo cosmológico más sencillo posible con sólo dos grados de libertad. Generalizaremos ahora el modelo anterior dando condiciones más amplias sobre la geometría de fondo, que podrá ser abierta, con secciones espaciales planas o curvas. Para el campo escalar incluiremos, en el potencial, un término de autointeracción del tipo  $\lambda\phi^4$  y consideraremos que la masa  $m^2$  puede tomar los valores  $m^2 = \pm\mu^2$  [Blanco *et. al* 1994]. Con el potencial definido de esta manera sería posible, en estudios ulteriores, analizar transiciones de fase debido a rotura espontánea de simetría en las etapas primitivas de evolución del Universo. Incluiremos asimismo, una constante cosmológica que juegue el rol de una densidad de energía de vacío. Con estas suposiciones el modelo que se obtiene es consistente con el paradigma inflacionario [Kolb y Turner 1990; Börner 1992].

Otras alternativas posibles, por ejemplo: incluir términos del tipo  $R^2$  en la acción como se hace al estudiar la anomalía de traza [Fichetti, Hartle y Hu 1979]; o considerar como fuente de las ecuaciones de Einstein un fluido viscoso [Calzetta, El Hasi y Tavakol 1994], presentan diversas dificultades técnicas, tanto en el análisis perturbativo como numérico. Sendas líneas de investigación se encuentran actualmente en desarrollo.

Considerando un sistema más general, que en el capítulo anterior, podremos no sólo verificar la robustez del comportamiento caótico del mismo, lo cual aparece como bastante lógico habida cuenta que los términos adicionales son no lineales, sino también, utilizar otras herramientas de aplicación usual en TSD. Notemos que el modelo considerado aquí exhibe un conjunto de puntos de equilibrio (o fijos), que no se hallan presentes en el ejemplo del capítulo anterior. Así, buscaremos dichos puntos críticos, estudiaremos su estabilidad lineal y determinaremos el rango de variación admisible de los parámetros

del modelo. Si bien el análisis de estos puntos fijos, al basarse en la dinámica linealizada, presenta características locales; el esquema del espacio de fases, que puede construirse a partir de ellos, es indicativo de la complejidad, o no, del movimiento del sistema.

Independientemente del análisis de la estabilidad lineal, es obvio que el estudio de la dinámica será más interesante cerca de las resonancias del sistema. Así, implementaremos el método de las Curvas Frecuencia - Frecuencia (CFF) [Stolovitzky y Hernando 1990], a fin de estimar condiciones iniciales que correspondan, aproximadamente, a dichas resonancias y resolveremos numéricamente el comportamiento dinámico en un entorno de las mismas. Construiremos, entonces, las secciones de Poincaré de dos formas distintas: variando las condiciones iniciales manteniendo los parámetros fijos y variando los parámetros para condiciones iniciales dadas [Blanco et. al 1994].

### III-1 El modelo generalizado

Como se ha dicho, asumiremos una geometría más general que en el capítulo precedente, estando definida ahora por el elemento de línea:

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + d\chi^2 + f^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] , \quad (\text{III.1})$$

donde

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & 0 \leq \chi \leq \pi, & k = +1 \\ \chi, & 0 \leq \chi < \infty, & k = 0 \\ \sinh \chi, & 0 \leq \chi < \infty, & k = -1 \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

y  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$ .

Al incluir una constante cosmológica  $\Lambda_0$  la acción queda:

$$S_g = m_p^2 \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda_0) . \quad (\text{III.3})$$

siendo en este caso

$$\sqrt{-g} = a^4 f^2(\chi) \sin \theta \quad (\text{III.4})$$

y el escalar de curvatura se modifica según el valor de  $k$ :

$$R = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a^3} + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (\text{III.5})$$

Por otra parte la nueva acción para el campo escalar es ahora:

$$S_f = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + 2 V(\Phi) + (1/6) R \Phi^2], \quad (\text{III.6})$$

con el potencial:

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} \tilde{\lambda} \Phi^4. \quad (\text{III.7})$$

Supondremos de aquí en más que el término de masa puede tener los dos signos posibles  $m^2 = \pm \mu^2$ ; el coeficiente de autointeracción lo tomaremos siempre positivo ( $\tilde{\lambda} > 0$ ). Esta forma del potencial  $V(\Phi)$  permite, en principio, considerar procesos con rotura espontánea de simetría. Nuevamente por consistencia con la simetría de la métrica de fondo pediremos que el campo sea homogéneo. Parametrizando el campo como  $\Phi = \phi/(a\sqrt{v})$  y  $\lambda = \tilde{\lambda}/v$ , y efectuando operaciones similares a las del capítulo anterior, obtenemos el nuevo Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2} [-(\pi^2 + k a^2) + (p^2 + k \phi^2) + m^2 a^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^4 + \frac{\Lambda}{2} a^4], \quad (\text{III.8})$$

donde  $\Lambda = 2\Lambda_o/3$ .

Nuevamente impondremos el vínculo Hamiltoniano ( $H = 0$ ), sobre las condiciones iniciales.

Notemos que en el caso particular que  $m^2 = 0$  el sistema es integrable en términos de funciones elípticas [Gradshteyn y Ryzhik 1980]. para masa no nula esta afirmación ya no resulta obvia.

### III-2 Estabilidad Lineal del Sistema

Para fijar ideas consideremos, por ejemplo, un sistema Hamiltoniano autónomo (es decir, independiente del tiempo), de un grado de libertad. La constancia del Hamiltoniano mantiene el flujo en el espacio de fases restringido a curvas de nivel. Si el sistema es ligado estas curvas serán en general cerradas, a excepción de los puntos de *ensilladura* (es decir, puntos de equilibrio inestable), del Hamiltoniano. Existen dos situaciones que pueden darse en estos casos, la trayectoria en  $t = -\infty$  parte de un punto inestable y en  $t = +\infty$  vuelve al mismo o, en su defecto, tiende a un punto inestable distinto. Las órbitas correspondientes se denominan *homoclínica* y *heteroclínica* respectivamente. Es claro que, en general, estas órbitas encerrarán un punto *elíptico* (o de equilibrio estable), del sistema. Un ejemplo típico es el del péndulo simple, donde la *separatriz* (que divide el espacio de fases en movimientos de rotación y libración), esta formada por dos órbitas heteroclínicas. Si se añade una perturbación oscilatoria al Hamiltoniano, su efecto sobre la dinámica, lejos de la zona de equilibrio inestable, será despreciable ya que el sistema sentirá principalmente la fuerza del sistema no perturbado (es decir, la influencia del punto de equilibrio estable). Pero cerca de las regiones inestables el efecto dominante será el de la perturbación. Muy cerca de la separatriz el sistema podrá pasar de la región ligada a la no ligada en forma arbitraria, ya que los períodos correspondientes a las zonas de rotación y libración son completamente diferentes (ver por ejemplo [Holmes 1990]).

Los argumentos precedentes se pueden aplicar tanto a sistemas con un número arbitrario de grados de libertad, como a secciones de Poincaré. En general, el movimiento resultante se considera caótico, aunque restringido a una región finita del espacio de fases (o de la sección), la *capa estocástica*. Esta región estará limitada por curvas invariantes, los toros KAM, pero su espesor aumenta si crece el valor del parámetro de la perturbación.

De la discusión anterior, vemos que para sistemas Hamiltonianos conservativos, es relativamente simple construir un esquema global del espacio de fases. Los *puntos de equilibrio* (o fijos), de esta clase de sistemas dinámicos juegan un rol importante y, teniendo un comportamiento característico local, se pueden pensar como centros

organizadores de la dinámica (Una clasificación de los puntos fijos puede verse en, por ejemplo: [Tabor 1989]). Generalmente estos puntos se dividen en: *elípticos* o *centros*, tal que la evolución del sistema en un entorno de ellos corresponde a una rotación pura, e *hiperbólicos* (también denominados *puntos de ensilladura*). Los centros están asociados a trayectorias regulares en el espacio de fases. un entorno de los mismos corresponde a regiones de estabilidad del sistema. Por el contrario, los puntos hiperbólicos suelen estar relacionados con condiciones de inestabilidad del sistema ya que, en un entorno de estos, el flujo es entrante hacia el punto en algunas direcciones (variedad estable) y saliente en otras (variedad inestable).

Los puntos fijos del sistema Hamiltoniano de la sección anterior, simbolizados por  $\mathcal{P} \equiv (a^o, \phi^o, \pi^o, p^o)$ , son aquellos para los cuales el flujo en el espacio de fases es estacionario. Esto es,

$$\dot{a}(\mathcal{P}) = 0, \quad (\text{III.9a})$$

$$\dot{\phi}(\mathcal{P}) = 0, \quad (\text{III.9b})$$

$$\dot{\pi}(\mathcal{P}) = 0, \quad (\text{III.9c})$$

$$\dot{p}(\mathcal{P}) = 0. \quad (\text{III.9d})$$

La solución de estas ecuaciones da cuatro clases de puntos de equilibrio para nuestro modelo:

$$\mathcal{P}_1 = (0, 0, 0, 0). \quad (\text{III.10})$$

$$\mathcal{P}_2 = (0, \pm\sqrt{-k/\lambda}, 0, 0), \quad (\text{III.11})$$

$$\mathcal{P}_3 = (\pm\sqrt{k/\Lambda}, 0, 0, 0), \quad (\text{III.12})$$

$$\mathcal{P}_4 = \left( \pm\sqrt{k \frac{(\lambda + m^2)}{(\Lambda \cdot \lambda - m^4)}}, \pm\sqrt{-k \frac{(\Lambda + m^2)}{(\Lambda \cdot \lambda - m^4)}}, 0, 0 \right), \quad (\text{III.13})$$

con

$$\Lambda \cdot \lambda - m^4 \neq 0,$$

si esta última relación no es válida es posible encontrar soluciones que no son puntos, sino subconjuntos extensos en el espacio de fases.

Notemos que si la constante  $k$  es nula (Universos planos), todos los puntos críticos son equivalentes:  $\mathcal{P}_1 \equiv \mathcal{P}_2 \equiv \mathcal{P}_3 \equiv \mathcal{P}_4 \equiv (0,0,0,0)$ . Mientras que si  $\lambda = \Lambda = 0$  (cf. Capítulo II),  $\mathcal{P}_4 = (\pm\sqrt{-k/m^2}, \pm\sqrt{k/m^2}, 0, 0)$ , con lo cual pierde sentido físico, en tanto  $\mathcal{P}_2$  y  $\mathcal{P}_3$  son puntos fijos situados en el infinito.

Los puntos críticos deben tener coordenadas reales, ya que pertenecen al espacio de fases del sistema. Esto impone las siguientes restricciones sobre los parámetros  $k$ ,  $\Lambda$ ,  $\lambda$  y  $m^2$ :

$$\mathcal{P}_2 \in \mathbb{R}^4 \iff k = -1.$$

$$\mathcal{P}_3 \in \mathbb{R}^4 \iff \text{sign}(k) = \text{sign}(\Lambda).$$

y para  $\mathcal{P}_4 \in \mathbb{R}^4$ , tenemos el siguiente conjunto de condiciones:

Para  $k = -1$ :

$$m^2 = +\mu^2 \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Lambda > 0 \Rightarrow \mathcal{P}_4 \notin \mathbb{R}^4 \\ \Lambda < 0 \iff |\Lambda| > \mu^2 \end{cases}$$

$$m^2 = -\mu^2 \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Lambda > 0 \iff 0 < \lambda < \mu^2 < \mu^4/\lambda < \Lambda & \circ \\ & 0 < \Lambda < \mu^4/\lambda < \mu^2 < \lambda \\ \Lambda < 0 \iff \lambda > \mu^2 \end{cases}$$

Para  $k = +1$

$$m^2 = +\mu^2 \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Lambda > 0 \Rightarrow \mathcal{P}_4 \notin \mathbb{R}^4 \\ \Lambda < 0 \Rightarrow \mathcal{P}_4 \notin \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

$$m^2 = -\mu^2 \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Lambda > 0 \iff 0 < \lambda < \mu^2 < \Lambda < \mu^4/\lambda & \circ \\ & 0 < \mu^4/\lambda < \Lambda < \mu^2 < \lambda \\ \Lambda < 0 \Rightarrow \mathcal{P}_4 \notin \mathbb{R}^4 \end{cases}$$

Por otra parte, los puntos críticos deben satisfacer el vínculo Hamiltoniano,  $H(\mathcal{P}) = 0$ . Sólo  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_4$  satisfacen esta condición. Además  $H(\mathcal{P}_4) = 0$  introduce una nueva relación entre los tres parámetros del modelo:

$$\Lambda + \lambda + 2m^2 = 0 \tag{III.14}$$

Habiendo identificado los puntos críticos  $\mathcal{P}$ , la estabilidad lineal se determina considerando la evolución del sistema a partir de un pequeño desplazamiento  $\delta\mathcal{P}$  alrededor de los mismos. Dado el sistema de ecuaciones completo:

$$\dot{a} = f_1(a, \phi, \pi, p) , \quad (\text{III.15a})$$

$$\dot{\phi} = f_2(a, \phi, \pi, p) , \quad (\text{III.15b})$$

$$\dot{\pi} = f_3(a, \phi, \pi, p) , \quad (\text{III.15c})$$

$$\dot{p} = f_4(a, \phi, \pi, p) , \quad (\text{III.15d})$$

se linealiza el mismo en un entorno del punto  $\mathcal{P}$ , es decir, se hace el desarrollo a primer orden en serie de Taylor del sistema (III.15):

$$\frac{d}{dt}(\delta X) = M \Big|_{\mathcal{P}} \delta X , \quad (\text{III.16})$$

siendo  $X$  el vector de coordenadas  $X = (a, \phi, \pi, p)$  y  $M$  la matriz Jacobiana del sistema o matriz de estabilidad. Los autovalores  $\xi_i$  de la matriz  $M$  determinan la estabilidad del punto fijo en cuestión. La solución general del sistema (III.16) es:

$$\delta X = \sum c_i D_i e^{\xi_i t} , \quad (\text{III.17})$$

donde los  $c_i$  son coeficientes arbitrarios y  $D_i$  los autovectores correspondientes. Entonces, para analizar la dinámica linealizada es preciso resolver el problema de autovalores en cada punto fijo  $\mathcal{P}$ . Esto es, encontrar las raíces de la ecuación secular,

$$\|M - \xi I\| \Big|_{\mathcal{P}} = 0 , \quad (\text{III.18})$$

siendo  $I$  la matriz identidad en  $\mathcal{R}^{4 \times 4}$ . De tal manera los autovectores asociados son tangentes a las trayectorias en el espacio fásico de la dinámica completa.

Vimos más arriba que los únicos puntos críticos que organizan la dinámica en nuestro sistema son  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_4$ . Del correspondiente análisis de estabilidad lineal, según el esbozo que acabamos de hacer, se concluye que para el caso  $k = -1$ ,  $\mathcal{P}_1$  es un punto de ensilladura o hiperbólico, mientras que  $\mathcal{P}_4$  es un centro o punto elíptico. Si  $k = 1$ ,  $\mathcal{P}_1$  es un centro y  $\mathcal{P}_4$  un punto de ensilladura. Mientras que para  $k = 0$  el único punto crítico  $\mathcal{P}_1$  es un centro.

Como se mencionó anteriormente, la coexistencia de puntos elípticos e hiperbólicos es una primera evidencia de la posibilidad del desarrollo de comportamiento caótico en el sistema.

### III-3 Curvas Frecuencia - Frecuencia

El comportamiento caótico en un sistema dinámico, cuasi-integrable, puede ser comprendido en términos de la rotura de los toros invariantes debido a la presencia de perturbaciones. El teorema KAM explica el desarrollo de este proceso y muestra que el mismo es gradual. El esquema resultante en el espacio de fases, el así llamado caos débil, presenta regiones de comportamiento regular allí donde los toros se conserven intactos e irregular en las regiones resonantes. Este fenómeno ocurre cuando el cociente entre las frecuencias asociadas a dos grados de libertad tiende a un número racional.

Dado que la dinámica será más interesante en las cercanías de las regiones resonantes, vemos que el análisis de las resonancias Hamiltonianas será de suma utilidad para estudiar la pérdida de estabilidad de las trayectorias. Para determinar la estructura de las resonancias en este modelo introduciremos las denominadas Curvas Frecuencia - Frecuencia [Stolovitzky y Hernando 1990].

Escribiremos el Hamiltoniano como función de un conjunto completo de variables de ángulo-acción, denotadas por  $J$  y  $\varphi$ :

$$H(J, \varphi) = H_0(J, \varepsilon) + H_1(J, \varphi, \varepsilon), \quad (\text{III.19})$$



donde  $H_0$  depende sólo de las acciones y el conjunto de parámetros denotados por  $\varepsilon = \{\lambda, \Lambda\}$  (notemos que  $m^2$  queda determinado por (III.14)); y  $H_1$  es el Hamiltoniano perturbativo no lineal.

Las frecuencias de los toros del sistema no perturbado son:

$$\omega_i(J_1, J_2, \varepsilon) = \frac{\partial H_0}{\partial J_i} \quad \text{con } i = 1, 2. \quad (\text{III.20})$$

Una resonancia  $p : q$  en un sistema dinámico bidimensional, como el que estamos considerando aquí, ocurre cuando  $p \cdot \omega_1 - q \cdot \omega_2 = 0$ . Así, la condición de resonancia representa líneas rectas con pendientes racionales, que pasan por el origen del espacio frecuencia - frecuencia. Para un sistema integrable, como el caracterizado por  $H_0$ , es posible ubicar las resonancias del sistema a través de las intersecciones de dichas rectas con las curvas  $\omega_2 = g(\omega_1, \varepsilon)$ , deducidas a partir de la Ec.(III.20) (eliminando las acciones  $J_i$ ), las cuales permanecen fijas durante la evolución del sistema.

Cuando la perturbación es tenida en cuenta los puntos representativos de las intersecciones se verán desplazados en el espacio de fases. Si la perturbación es lo suficientemente débil los puntos, que deberían determinarse ahora por las curvas  $\omega_2 = g(\omega_1, \varepsilon + \delta\varepsilon)$ , permanecerán en un entorno de las resonancias originales.

Nuestro objetivo es analizar el comportamiento del sistema cerca de estas resonancias  $p : q$ . Para ello deberemos determinar la intersección de las mencionadas líneas de pendientes racionales con las curvas generadas por la función  $g$ .

Utilizando la siguiente transformación canónica,

$$a = \sqrt{2K} \sin \alpha \quad , \quad \pi = \sqrt{2K} \cos \alpha \quad , \quad (\text{III.21a})$$

$$o = \sqrt{2j} \sin \varphi \quad , \quad p = \sqrt{2j} \cos \varphi \quad , \quad (\text{III.21b})$$

(aquí  $(j, K)$  juegan el papel de  $(J_1, J_2)$ , respectivamente. cf. Ec.(III.20)). Entonces tenemos que  $H_0$  y  $H_1$  se pueden escribir como:

$$H_0 = -K + j - \frac{1}{2}\mu^2 K j + \frac{3}{8}(\Lambda K^2 + \lambda j^2) , \quad (\text{III.22})$$

$$\begin{aligned} H_1 = & \frac{1}{2}K(\mu^2 j - \Lambda K) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}j(\mu^2 K - \lambda j) \cos 2\varphi + \\ & \frac{1}{8}\Lambda K^2 \cos 4\alpha + \frac{1}{8}\lambda j^2 \cos 4\varphi - \\ & \frac{1}{4}\mu^2 K j \{ \cos 2(\alpha + \varphi) + \cos 2(\alpha - \varphi) \} , \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

donde se puede ver que, a primer orden, sólo hay resonancias de la clase 1 : 1.

Aplicando las ecuaciones de Hamilton-Jacobi al Hamiltoniano no perturbado  $H_0$ , encontramos:

$$\omega_1 = -1 - \frac{1}{2}\mu^2 j + \frac{3}{4}\Lambda K , \quad (\text{III.24a})$$

$$\omega_2 = 1 - \frac{1}{2}\mu^2 K + \frac{3}{4}\lambda j . \quad (\text{III.24b})$$

En este caso, si bien el Hamiltoniano integrable  $H_0$  es relativamente sencillo, determinar analíticamente  $\omega_2 = g(\omega_1, \varepsilon)$  conduce a una función multivaluada. Por otra, parte es posible y, en principio se aplica a casos más complicados, obtener estas curvas numéricamente. Teniendo en cuenta que las acciones  $K$  y  $j$  son positivas y deben satisfacer la condición  $H_0 = 0$ , se puede determinar el o los intervalos de variación de ambas, luego, a partir de la Ec.(III.24) se evalúan, algebraicamente,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en términos de  $K$  y  $j$ . De esta manera se obtiene una tabla de valores para los dos frecuencias y se grafican una en función de la otra.

En la Fig.12 se muestran CFF para el Hamiltoniano integrable  $H_0$ , con los parámetros  $\Lambda$  y  $\lambda$  tomando distintos valores. Como se ve por el cruce de las curvas en dos puntos, las frecuencias de resonancia parecen ser independientes de ambos parámetros. En el caso correspondiente a la resonancia  $-1 : 1$ , se tiene que las acciones son nulas ( $j = K = 0$ ), así, los valores obtenidos se pueden interpretar como las frecuencias de pequeñas oscilaciones del sistema.

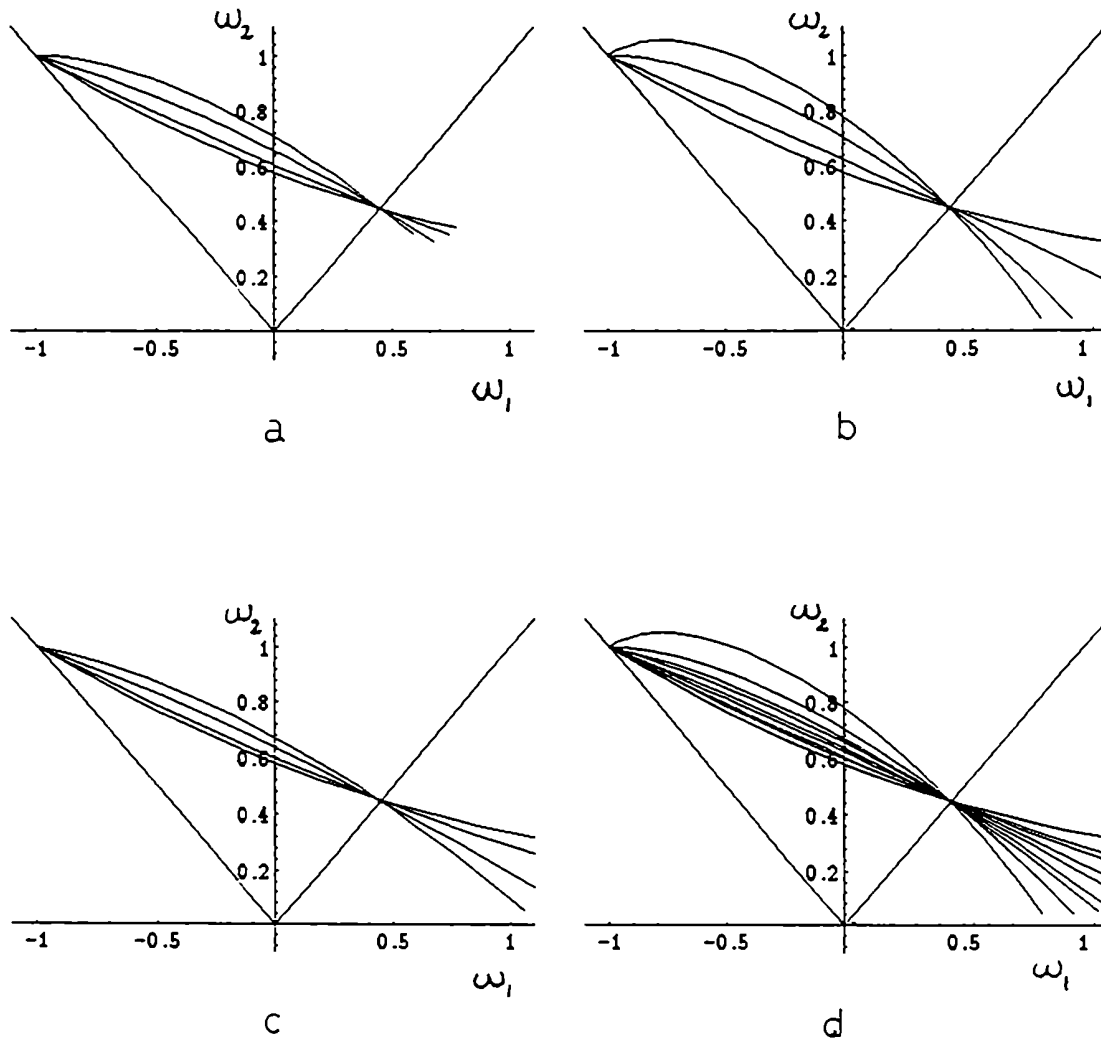


Figura 12. CFF para distintas combinaciones de los parámetros  $\Lambda$  y  $\lambda$ . a)  $\Lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 10^{-6}, 0.05, 0.15, 0.25$ . b)  $\Lambda = 0.3$ ,  $\lambda = 10^{-6}, 0.05, 0.15, 0.25$ . c)  $\Lambda = 0.7$ ,  $\lambda = 10^{-6}, 0.05, 0.15, 0.25$ . d) Superposición de los tres gráficos anteriores.

#### III-4 Resultados Numéricos

De la Fig.12 se pueden obtener las frecuencias de resonancia del sistema integrable (III.22). Cuando el sistema se perturba los valores correspondientes a estas frecuencias cambian pero, en la medida que la perturbación no es muy grande, permanecen en un entorno de los no perturbados. Entonces, podemos elegir, con bastante arbitrariedad,

un par de valores  $(\omega_1, \omega_2)$  próximos a los de las resonancias del sistema integrable y a partir de éstos calcular las acciones  $j$  y  $K$  (o, eventualmente volver a las variables “físicas” vía la transformación canónica inversa), para usarlas como condiciones iniciales, en simulaciones numéricas, para observar el comportamiento del sistema perturbado (III.19).

Encontramos que para la resonancia  $1 : 1$  nuestro algoritmo numérico era incapaz de preservar el vínculo Hamiltoniano, para ningún valor en un entorno del mismo, luego de unos pocos pasos de integración. Esto se debe a que para esas condiciones la región correspondiente del espacio de fases es no acotada (cf. Cap. IV), y el método numérico no es estable. En el caso de las  $-1 : 1$  se ve que los valores resonantes de la dinámica no perturbada corresponden a  $-\omega_1 = \omega_2 = 1$ . Si elegimos dos valores próximos a estos para estudiar la dinámica completa, podemos obtener los valores correspondientes a las “variables físicas”  $(\phi, a, p, \pi)$ , vía las ecuaciones (III.24) y (III.21).

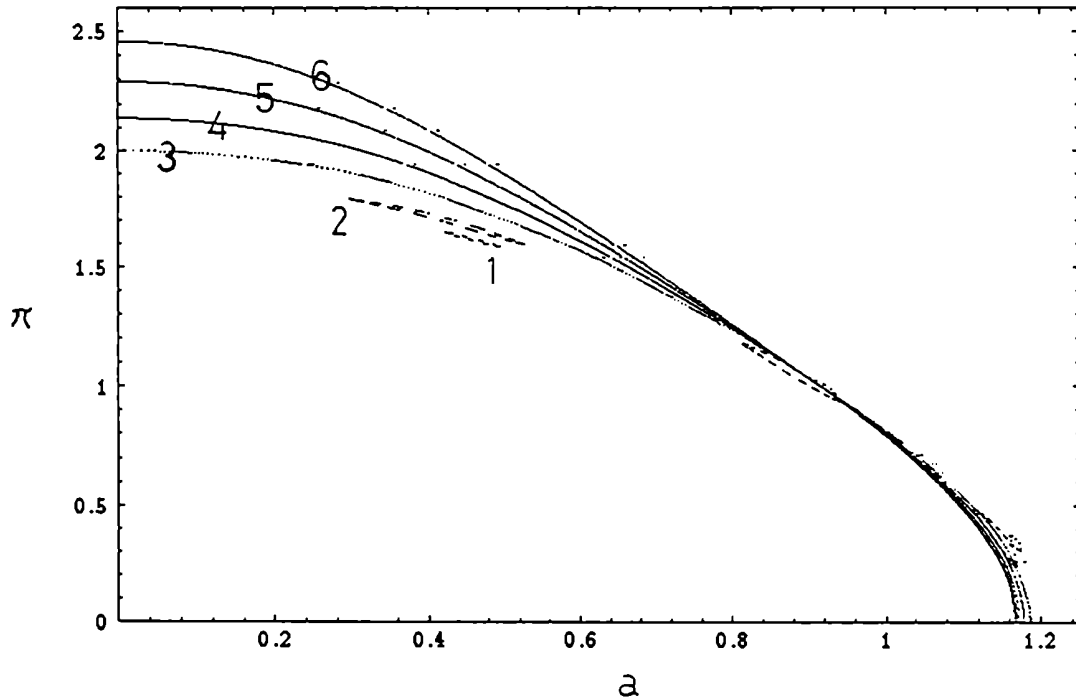


Figura 13. Sección de Poincaré, obtenida mediante variación de parámetros, para  $\Lambda = 0.25$  y  $\lambda = 0.01, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$ .

En la Fig.13 presentamos las secciones de Poincaré  $(a, \pi)$  evaluadas para 5000 puntos para una sección definida por  $\phi = 2\pi$  correspondiente a las condiciones iniciales  $a = 0.9$ ,  $\pi = 0.9$  y  $\phi = 0$  (el valor inicial de  $p$  se obtiene del vínculo Hamiltoniano) para  $\Lambda = 0.25$  y  $\lambda = 0.01, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$  y denotadas por 1 a 6.

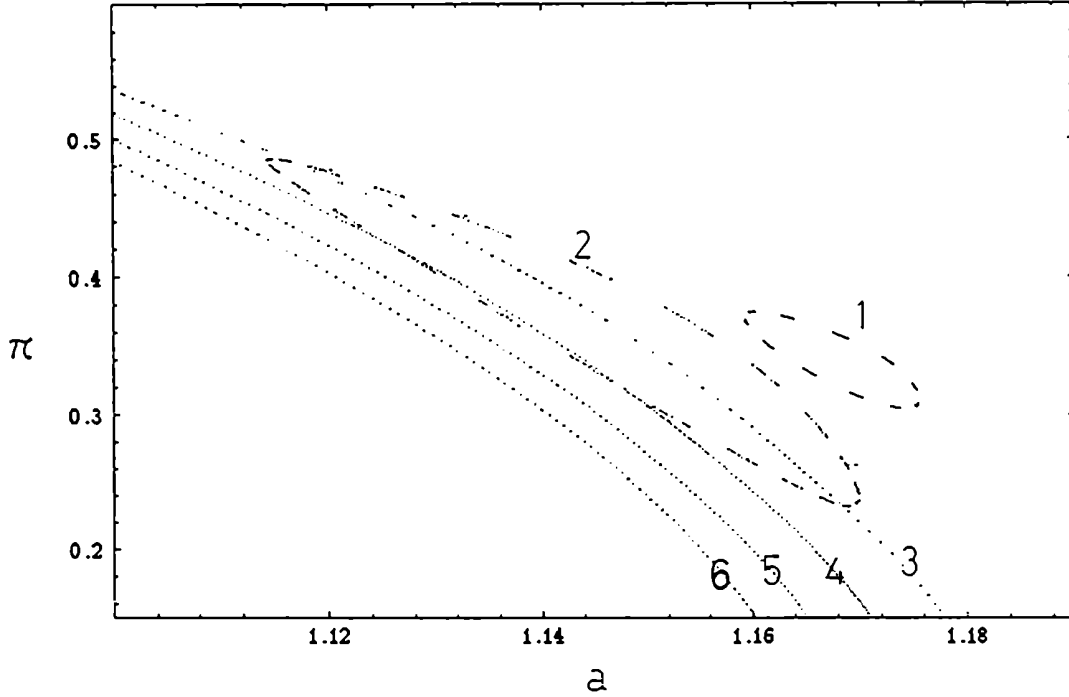


Figura 14. Detalle de la esquina inferior derecha de la figura anterior.

Los valores de las condiciones iniciales se extrajeron del diagrama CFF en la forma indicada más arriba. Notemos que para el conjunto de parametros 1 y 2 los toros están rotos. En la Fig.14 se observa un detalle de estos toros rotos, correspondiente al ángulo inferior izquierdo de la figura 2. Obviamente, como las seis curvas corresponden a las mismas condiciones iniciales, pero distintos parámetros no hay problema en que se crucen, como se aprecia claramente en la figura. Observemos que, trayectorias con mayor no linealidad ( $\lambda$  más grande), son más estables: esto puede atribuirse a un aumento del término de masa en el Hamiltoniano Ec.(III.5), que compensa las contribuciones no lineales.

En la Fig.15 mostramos un detalle de las secciones de Poincaré correspondientes a valores fijos de los parámetros  $\Lambda = 0.25$  y  $\lambda = 0.01$  donde hemos variado muy lentamente las condiciones iniciales para  $a$  y  $\pi$  entre 0.88 y 0.91, respectivamente, conservando  $\phi = 0$ . En esta figura se observan toros con diferente grado de rotura y varias islas de estabilidad alrededor de puntos elípticos. Nótese la aparición de trayectorias irregulares (caos) alrededor de puntos no lineales hiperbólicos.

De los resultados precedentes se concluye que nuestro modelo cosmológico presenta una región de caos débil, la cual se alcanza por rotura sucesiva de toros resonantes debido a la acción de resonancias  $-1 : 1$ . Esto es una indicación de comportamiento dinámico no trivial, en el Universo primitivo, a la vez que se verifica que el caos es robusto al considerar modelos con interacciones más complejas.

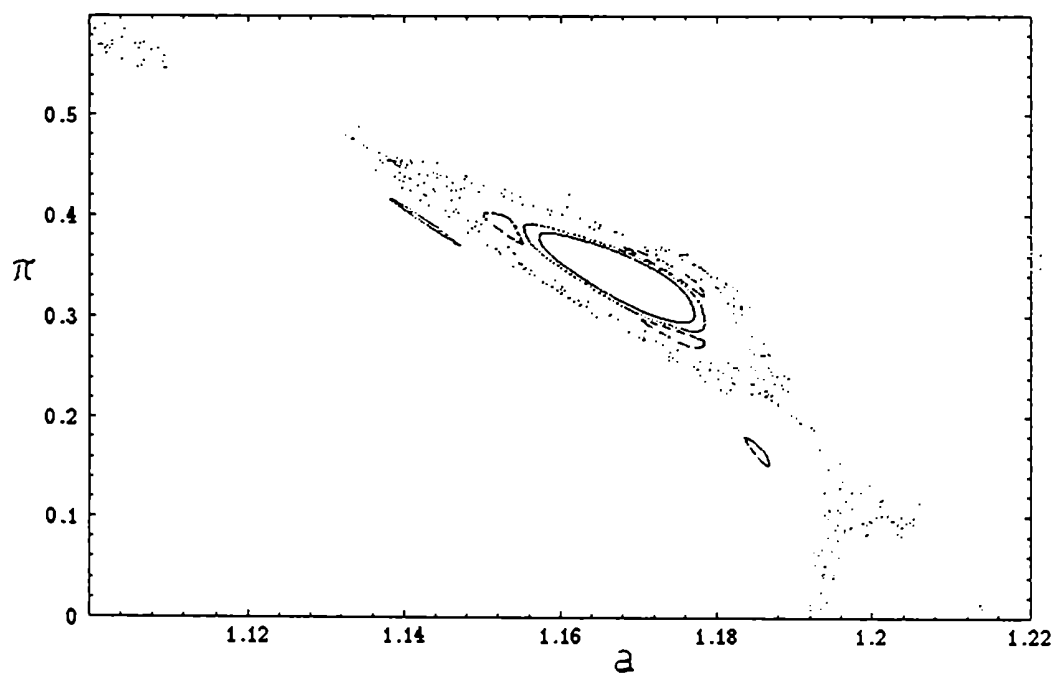


Figura 15. Sección de Poincaré con parámetros fijos ( $\Lambda = 0.25$  y  $\lambda = 0.01$ ), tomando diferentes condiciones iniciales.

## CAPÍTULO IV

### DINÁMICA NO TRIVIAL EN MODELOS INFLACIONARIOS

Hasta aquí hemos buscado evidencia de comportamiento caótico sin preocuparnos demasiado por la interpretación cosmológica. Ahora, trataremos de construir un modelo sencillo, pero consistente, para investigar la clase de fenómenos asociados con términos no lineales en el Hamiltoniano y su posible incidencia en la evolución posterior del Universo Primitivo. Asimismo, ampliaremos el espectro de herramientas de aplicación usual en TSD, mediante la utilización del método de la *integral de Melnikov* como indicador, más sofisticado, de caos homoclínico. Su primera aplicación en problemas Cosmológicos se debe a Koiller *et al.* [Koiller, Neto y Soares 1985]; posteriormente, se ha usado tanto en problemas relativistas [Bombelli y Calzetta 1992], como cosmológicos [Calzetta y El Hasi 1993; Calzetta 1994].

El modelo que utilizaremos, puede ser considerado dentro del contexto del escenario de inflación caótica de Linde [Linde 1983], donde la inflación está potenciada por la energía de vacío del campo del inflatón al rodar lentamente hacia el mínimo del potencial. Nos restringiremos estrictamente al período inflacionario, bastante antes de que comience el “recalentamiento”. Como sería de esperar, una vez que la inflación comienza, el Universo cae rápidamente en una etapa de expansión tipo DeSitter, de acuerdo con el principio de “calvicie cósmica” [Gibbons y Hawking 1977; Nakao *et al.* 1991, 1993]. No obstante, también encontramos que pueden tener lugar comportamientos extremadamente complejos en etapas previas a la inflación. La lista de efectos no triviales que se encuentran incluyen la rotura de toros KAM [Kolmogorov 1957; Arnold 1963; Moser 1962], la formación de cantores [Meiss 1992] y la difusión de Arnold [Arnold 1964; Chirikov 1979; Zaslavsky *et al.* 1991]. Dado que la complejidad del comportamiento aumenta con el número de grados de libertad del sistema dinámico, similares conclusiones valen para modelos más complicados, aún para cualquier modelo basado

en una transición de fase de segundo orden y/o asumiendo un período de descenso lento [Lucchin y Matarrese 1985; Mollerach et al. 1991].

La dinámica de los modelos cosmológicos, considerando como campo de materia presente sólo al inflatón, ha sido estudiada por muchos autores [Belinsky 1985a,b,c]. En estos estudios es costumbre considerar sólo modelos isótropos y homogéneos y efectuar una conveniente elección de medida; la dinámica que resulta posee sólo dos grados de libertad, la amplitud del campo del inflatón  $\varphi$  y el “radio del Universo” de Friedmann - Robertson - Walker (FRW)  $a$ . El comportamiento de este sistema es relativamente simple, exhibiendo un atractor inflacionario en el espacio de fases.

Debido a su sencillez los modelos anteriores no pueden, por sí mismos, dar cuenta del final del período inflacionario. Si consideramos que al final de la era inflacionaria debe comenzar una etapa de FRW dominada por la radiación, debemos incluir en el modelo un campo de radiación (que por simplicidad supondremos escalar), de tal modo que los cuantos del inflatón decaigan excitando modos de radiación, “recalentando” el Universo y desacelerando la expansión. Durante la etapa inflacionaria este campo de radiación debería permanecer en el estado de vacío, con su amplitud determinada por la evolución en las etapas previas cuántica y semiclásica. Debido a que no tiene masa este campo presenta simetría conforme, es decir, está protegido contra la creación cosmológica de partículas: sin embargo la presencia del inflatón podría romper esta simetría conforme y dotar de masa al campo (escalar) de radiación [Calzetta y El Hasi 1994].

En este capítulo nos concentraremos en los efectos dinámicos de incluir un campo de radiación en un modelo inflacionario. Si bien, como dijimos, la “radiación” puede ser descrita como un campo escalar conforme, esta simetría conforme se rompe debido al valor de expectación no nulo del inflatón y la radiación adquiere masa a través de su acoplamiento con él.

Anteriormente se mostró cómo el acoplamiento de un Universo de FRW con un campo escalar masivo exhibe caos homoclínico [Calzetta y El Hasi 1993; Calzetta 1994; Bombelli, Castagnino y Lombardo 1994]. Mientras sería inapropiado describir a un Universo inflacionario como caótico, ya que las trayectorias típicas son no ligadas, resulta



claro que la rotura de la simetría conforme debe conducir a un incremento de la complejidad del sistema. Concretamente, mientras que bajo la simetría conforme existe una clara distinción entre Universos que inflan y los que recolapsan, una vez que la simetría conforme se rompe aparece una capa estocástica de medida no nula en el espacio de fases, donde las órbitas pueden ser atrapadas para siempre o escapar y aproximarse a una solución del tipo DeSitter. Veremos que la razón por la cual el recolapso puede ser evitado tiene que ver con que la variable de acción asociada al campo de radiación no se conserva. Este efecto es similar al proceso de creación de partículas que se encuentra en los modelos semiclásicos [*Parker 1969*]; ya que la variable de acción es, esencialmente, el número de partículas del campo de radiación en segunda cuantificación, como se define en el modelo adiabático de partículas [*Birrell y Davies 1982*].

En este capítulo consideraremos dos modelos diferentes que exhiben la influencia de un campo de radiación escalar sobre la expansión del Universo en las etapas primitivas de la inflación. En el primer modelo el campo de radiación será considerado homogéneo junto con la métrica y el inflatón. En el segundo modelo el campo de radiación estará constituido por un fondo homogéneo más un modo inhomogéneo. Por supuesto, la presencia real de tales modos está determinada por la dinámica de la creación de partículas. La métrica será siempre considerada como en un modelo de FRW espacialmente cerrado, con “radio del Universo”  $a$ . Esta suposición no es consistente con las ecuaciones de Einstein pero puede ser justificada físicamente, en tanto nuestro principal interés sea estudiar la reacción de la dinámica del Universo cuando se aumenta el número de grados de libertad.

#### IV-1 El Modelo

Describamos con un poco más de precisión el modelo a ser estudiado. Como el campo del inflatón, dada la suposición de descenso lento, no juega rol dinámico en la época de interés lo vamos a substituir por una constante cosmológica  $\Lambda$ . El campo de radiación estará conformemente acoplado a  $a$ , pero también tendrá masa  $m$ . La masa  $m$  está relacionada con el acoplamiento entre el inflatón y la radiación [*Calzetta y El*

*Hasi 1994*]. Puede verse que valores tan altos como  $m \sim 10^{-1}$  (en unidades naturales,  $\hbar = c = 8\pi G = 1$ ), son razonables dentro del contexto que estamos analizando [*Borner 1992*].

Como consideraremos modos inhomogéneos del campo escalar supondremos que no sólo es función del tiempo, sino también de las coordenadas  $\Phi = \Phi(\eta, \vec{x})$ , siendo su acción:

$$S_f = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + (m^2 \Phi^2 + (1/6) R \Phi^2)] . \quad (\text{IV.1})$$

Para resolver la dinámica definida por la ec.(IV.1), desarrollaremos el campo como una superposición de la forma [*Birrel y Davies 1982*]:

$$\Phi(\eta, \vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n}{a}(\eta) Y_n(\vec{x}) , \quad (\text{IV.2})$$

tal que las  $Y_n(\vec{x})$  son autofunciones del operador Laplaciano definido sobre las hipersuperficies espaciales:

$$\nabla_{(3)}^2 Y_n(\vec{x}) = -(n^2 - k) Y_n(\vec{x}) . \quad (\text{IV.3})$$

Con las convenciones para la métrica ( $k = 1$ ) y el campo escalar de los capítulos precedentes, y teniendo en cuenta la descomposición propuesta para el campo, se obtiene el sistema Hamiltoniano descrito por:

$$H = \frac{1}{2} [-(\pi^2 + a^2) + 2\Lambda \dot{a}^4 + \sum_n [p_n^2 + (n^2 + m^2 a^2) \phi_n^2]] \quad (\text{IV.4})$$

Este Hamiltoniano corresponde a un sistema con infinitos grados de libertad ( $a$  y los  $\phi_n$ ). Para estudiar el problema en todo detalle habría que recurrir a técnicas de teoría de turbulencia [*Landau y Lifshitz 1959; Sagdeev, Usikov y Zaslavsky 1988*]. Como sólo

estamos interesados en analizar efectos no triviales en cosmología, pero sin seguir en todo detalle la evolución del modelo (para lo cual, por cierto, deberemos utilizar una métrica más general que la de FRW), nos contentaremos con considerar sólo el modo homogéneo del campo, que llamaremos simplemente  $\phi_1$ , y el primer modo inhomogéneo ( $\phi_2$ ).

## IV-2 Análisis del Modelo

Concentrémonos primeramente en el estudio del modelo homogéneo. Utilizando la transformación canónica usual,

$$\phi_1 = \sqrt{2j_1} \sin \varphi_1 \quad , \quad p_1 = \sqrt{2j_1} \cos \varphi_1 \quad , \quad (\text{IV.5})$$

el Hamiltoniano  $H$  se puede escribir como:

$$H = j_1 - \frac{1}{2}(\pi^2 + a^2) + \Lambda a^4 + m^2 j_1 a^2 \sin^2 \varphi_1 \quad . \quad (\text{IV.6})$$

Si se deprecia la masa del campo de radiación, hay simetría conforme y el sistema es integrable. La métrica y el campo  $\phi_1$  están desacoplados, excepto por el efecto de la métrica sobre la densidad de energía del campo  $j_1/a^4$ ,  $j_1 \equiv \text{constante}$ . Existen dos soluciones estáticas inestables, los Universos de Einstein definidos por  $a = \pm(1/2\sqrt{\Lambda})$ , (con  $j_1 = 1/16\Lambda$ ). Estas soluciones son puntos fijos hiperbólicos en el espacio de fases y están unidos por dos órbitas heteroclínicas (la separatriz), definidas por:

$$\pi = \pm \frac{1 - 4\Lambda a^2}{\sqrt{8\Lambda}} \quad . \quad (\text{IV.7})$$

Dentro de la misma, el movimiento es cuasiperiódico y confinado a toros KAM invariantes. Las órbitas inflacionarias son no ligadas y se aproximan, asintóticamente, a las variedades inestables de las soluciones estáticas. Así, todos los Universos que inflan

comparten el mismo comportamiento asintótico, de acuerdo con el principio de “calvicie cósmica”.

En el modelo con simetría conforme hay, por lo tanto, una clara distinción entre condiciones inflacionarias y de recolapso. Restringiéndonos a Universos que se originan en un Big Bang ( $a = 0$  en el origen de tiempos), estos inflan si  $j_1 > 1/16\Lambda$ , y recolapsan si  $j_1 < 1/16\Lambda$ . No hay órbitas que conecten una región con la otra, en la medida que la separatriz se erige como una barrera infranqueable entre ambas.

Antes de considerar el efecto de la perturbación producida por la presencia de masa veamos, más generalmente, que es lo que ocurre con los sistemas integrables en la vecindad de los puntos hiperbólicos. Si se tiene un sistema integrable de dos grados de libertad  $(q_1, q_2)$ , hay dos constantes de movimiento, el Hamiltoniano  $H$  y alguna otra integral  $I_2$ . Para una dada trayectoria se tiene:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = C_1 . \quad (\text{IV.8})$$

$$I_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = C_2 . \quad (\text{IV.9})$$

con  $C_1$  y  $C_2$  constantes. Al definir una sección de Poincaré se introduce una tercera relación,

$$\Sigma(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0 . \quad (\text{IV.10})$$

Tomemos  $q_1$  y  $p_1$  como coordenadas en la sección de Poincaré y seleccionemos, como es usual, un valor de  $C_1$ . Entonces es posible resolver el sistema de ecuaciones anterior y obtener la relación:

$$I_2(q_1, p_1) = C_2 , \quad (\text{IV.11})$$

Esto define una familia uniparamétrica de curvas invariantes en la sección.

Extendamos la sección a un espacio de tres dimensiones, considerando a  $C_2$  como tercera coordenada. Ahora la relación (IV.11) representa una superficie tridimensional y las curvas invariantes son superficies de nivel. Un punto fijo elíptico está encerrado por curvas invariantes cerradas como se muestra en la Fig.16a. Por el contrario en el entorno de los puntos hiperbólicos la situación es bastante más compleja (ver Fig.16b). Supongamos que, partiendo de un punto hiperbólico, nos movieramos siguiendo una de estas curvas invariantes para un valor de  $C_2$  dado. Como es una curva de nivel daríamos toda la vuelta al centro (punto elíptico), retornando al punto de partida (Fig.16c). En forma más general, podríamos hacer lo mismo si existieran varios puntos hiperbólicos (correspondientes a ciclos de la sección de Poincaré, ver Fig.16d).

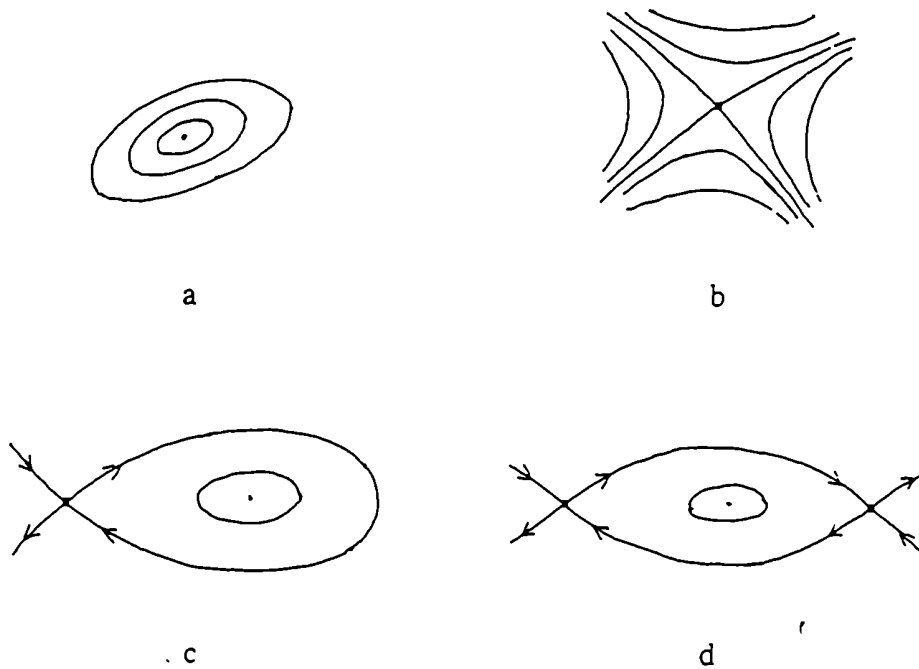


Figura 16. Distintos tipos de puntos de equilibrio (Hénon 1953).

De hecho, lo que estamos haciendo es alejarnos del punto fijo siguiendo una variedad inestable y retornando a él por la variedad estable. En realidad las trayectorias no son continuas, ya que la sección se forma con secuencias discretas de puntos. Lo que ocurre es que la trayectoria yace sobre la variedad invariante inestable y también sobre la estable, y la secuencia discreta de puntos se acerca al punto fijo tanto cuando el número de iteraciones tiende a  $+\infty$  como a  $-\infty$ .

Podemos considerar ahora, que ocurre cuando el sistema se vuelve no integrable por efecto de una perturbación. La cantidad  $C_2$  ya no se conserva. Por lo tanto, si salimos por la variedad inestable no necesariamente volveremos al punto fijo (o alcancemos el siguiente punto en un ciclo hiperbólico); aunque si el sistema es sólo ligeramente perturbado, volveremos *casi* exactamente el punto de partida.

Si se dibujan las variedades estable e inestable,  $W^e$  y  $W^i$ , se observa que las mismas no se unen suavemente, como antes, sino que se cruzan transversalmente (Fig.17a).

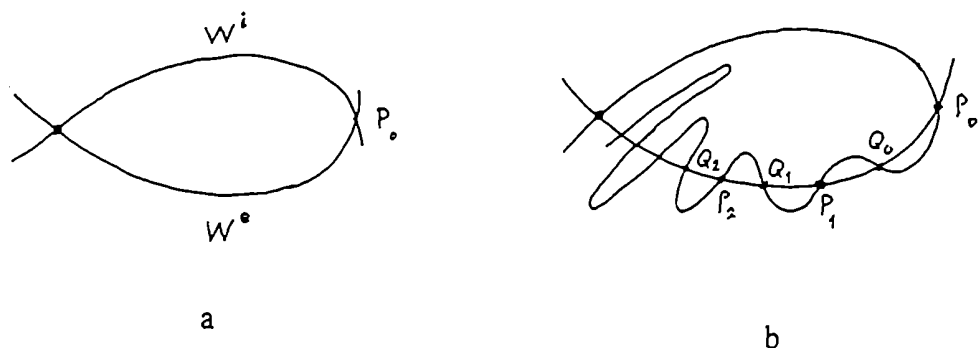
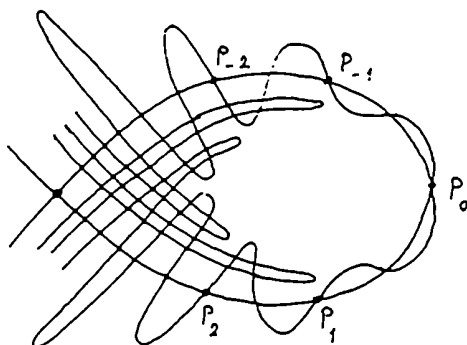


Figura 17. Variedades estable e inestable del punto homoclínico  $P_0$  (Hénon 1983).

El punto de intersección  $P_0$  es un *punto homoclínico*. la existencia del mismo tiene fuertes consecuencias en la evolución subsiguiente el sistema. Las sucesivas imágenes  $P_1, P_2, \dots$  de  $P_0$ . pertenecen a la variedad estable  $W^e$  y tienden al punto fijo. Pero también pertenecen a la variedad inestable  $W^i$ , por lo tanto  $W^i$  debe pasar por dichos puntos (Fig.17b). La dirección de cruce se preserva por la aplicación sobre la sección de

Poincaré, así, debe existir una segunda secuencia de puntos  $Q_j$ , que alterna con los  $P_j$ . Debido a que la aplicación preserva el área, los lazos sucesivos que  $W^i$  forma sobre un lado de  $W^e$  deben tener áreas iguales. La base de estos lazos tiende a 0 a medida que  $j$  tiende a  $+\infty$ , por lo tanto su longitud debe crecer constantemente.

De tal manera los lazos se vuelven más delgados y estirados (ver Fig.18). El estiramiento crece exponencialmente y pronto los lazos son tan grandes como la figura entera debiendo plegarse sobre sí mismos, comienza entonces un proceso de estirado y plegado que incluye intersecciones de las distintas curvas; estas intersecciones son a su vez puntos homoclínicos, así que el proceso se repite a escalas cada vez más chicas formando un esquema de extrema complejidad. En la Fig.18 se ven los lazos de primer orden para las variedades estables e inestables [Poincaré 1892; Hénon 1983; Tabor 1939].



**Figura 18.** Cruce de las variedades estable e inestable al perturbar el sistema (Hénon 1983).

#### IV.2.a - La Integral de Melnikov

Parece, entonces, que el problema esencialmente radica en ver si existe, al menos, un cruce entre las variedades estables e inestables. Para ello resulta de suma utilidad el criterio de la integral de Melnikov [Melnikov 1965], que permite calcular la distancia

$M$  entre las variedades estable e inestable cuando se rompe la separatriz (del sistema integrable) por efecto de la perturbación. Si bien el método vale para condiciones bastante generales, nosotros utilizaremos la versión más sencilla, que se aplica a sistemas Hamiltonianos sometidos a perturbaciones periódicas, también Hamiltonianas, como es el caso que estamos considerando. En ese caso, la integral de Melnikov resulta ser:

$$M(q_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H(q - q_0), \delta H(q - q_0, q)\} dq, \quad (\text{IV.12})$$

donde la integración se efectúa sobre la separatriz del Hamiltoniano no perturbado,  $q_0$  corresponde a la fase inicial de la perturbación y  $\{ , \}$  es el corchete de Poisson.

Nosotros tenemos un Hamiltoniano no perturbado, definido por (IV.6) con  $m = 0$ , sometido a la perturbación:

$$\delta H = m^2 j_1 a^2 \sin \varphi_1. \quad (\text{IV.13})$$

Aplicando, entonces, el método de la integral de Melnikov, el resultado que se obtiene (para un resumen del cálculo ver Apéndice B)

$$M(\varphi_1) = \frac{m^2}{8\Lambda^2} \frac{\sqrt{2}\pi}{\sinh \sqrt{2}\pi} \sin \varphi_1. \quad (\text{IV.14})$$

tiene ceros aislados, es decir, la integral de Melnikov  $M(\varphi_1)$  se anula periódicamente, signo inequívoco de *caos homoclínico*.

Por lo tanto, vemos que el acoplamiento entre  $H$  y  $\delta H$  induce resonancias internas entre  $a$  y  $\omega_1$  (o  $\varphi_1$ ) y como consecuencia ambos, la separatriz y los toros KAM resonantes subyacentes, son destruidos. En su lugar aparece una nueva clase de estructura en el espacio de fases, la capa estocástica [Calzetta y El Hasi 1995]. La estructura de la capa se puede analizar muy bien por medio de las secciones de Poincaré [Hénon 1985]. Además, se encuentra que junto con los puntos fijos y toros invariantes hay una nueva clase de órbita invariante, los "cantoros" [Meiss 1992]. Los cantoros poseen aberturas las cuales



permiten la comunicación entre diferentes partes de la capa estocástica y el exterior. La separación entre condiciones iniciales de recolapso y de inflación es entonces menos clara: órbitas que comienzan por debajo de la separatriz original pueden atravesar las aberturas y convertirse en inflacionarias a través de un proceso de difusión Hamiltoniana [Arnold 1964; Chirikov 1979; Zaslavsky et al. 1991]. Por lo tanto, que un Universo sea inflacionario o no puede depender de efectos dinámicos no triviales como la rotura de los toros KAM.

En la medida que consideremos al campo  $\phi_1$  como homogéneo, habrá siempre un valor crítico del momento  $\pi$  tal que, las órbitas que salen de la singularidad por debajo de este umbral siempre recolapsan. Eso se debe al hecho que, una vez impuesto el vínculo Hamiltoniano, el espacio de fases disponible es tridimensional y así, es separable por toros KAM bidimensionales. Por lo tanto, cualquier toro no roto atrapa el volumen en el espacio de fases contenido en su interior, haciendo el recolapso inevitable. Es claro, además, que este valor crítico será cercano al valor de la separatriz  $\pi \sim 1/\sqrt{8\Lambda}$  en  $a = 0$ , al menos para valores de la masa pequeños. En forma similar, aunque la conservación del volumen en el espacio de fases implica que algunas órbitas que parten del exterior de la separatriz deben entrar en la capa estocástica y ser atrapadas, es razonable pensar que el valor de la masa no afectará en gran medida el comportamiento de las órbitas por encima de la separatriz. De estas consideraciones se concluye que la clase de efectos discutidos más arriba están asociados a condiciones iniciales bastante excepcionales.

Sin embargo, la localización de la capa estocástica en el espacio de fases se debe a que hemos considerado un modelo con sólo dos grados de libertad. Tal localización no ocurre en modelos de dimensión más alta, como aquellos donde se consideran inhomogeneidades del campo y/o la geometría. El segundo modelo a considerar en este capítulo, donde se agrega un solo modo inhomogéneo al campo homogéneo  $\phi_1$  de fondo, constituye un primer paso en el estudio de esos modelos más complejos.

La dinámica de los sistemas no-integrables, con más grados de libertad, es cualitativamente distinta de la de aquellos con sólo dos grados de libertad. En nuestro caso tenemos un espacio de fases de seis dimensiones  $(a, \phi_1, \phi_2, \pi, p_1, p_2)$ , donde  $(\phi_2, p_2)$  representan la amplitud del modo inhomogéneo y de su momento canónicamente conjugado. Aún habiendo forzado el vínculo Hamiltoniano, el espacio de fases disponible

es de dimensión cinco y no puede ser dividido por toros tridimensionales. Así, los toros no rotos no impiden la difusión y, en principio, una trayectoria que comienza en  $a = 0$  con un valor arbitrario de  $\pi$  puede atravesar la separatriz e inflar.

Este efecto podría considerarse un análogo del concepto de “creación a partir de la nada”, que se ha propuesto en Gravedad Cuántica [Vilenkin 1983]. Vemos que según nuestro modelo es innecesario suponer una densidad inicial de energía de radiación muy alta, para explicar cómo el Universo pudo evitar el recolapso, antes que ocurriera la inflación. En ese sentido, es similar a análisis previos, en cosmología semiclásica, donde la creación de partículas fue invocada para cumplir una tarea semejante [Calzetta 1991]. Por otra parte, muestra también que la dinámica no-trivial discutida aquí se extiende a todo el espacio de fases.

Nuestro objetivo es mostrar los efectos dinámicos no-triviales descriptos más arriba en simulaciones numéricas de ambos modelos. Debido a que la difusión Hamiltoniana es un proceso extremadamente lento, sería sumamente difícil seguir numéricamente una dada trayectoria que parte desde un entorno del origen hasta convertirse en inflacionaria. En su lugar construiremos las secciones de Poincaré [Hénon 1983], para ambos modelos (en el segundo modelo la sección de Poincaré será 4-dimensional, así que sólo presentaremos proyecciones de la misma), estudiaremos los exponentes de Lyapunov locales a lo largo de órbitas seleccionadas [Wolf et al. 1985] y para el modelo inhomogéneo construiremos un mapa en el espacio de condiciones iniciales, con el objeto de comprobar la posible existencia de la *Red de Arnold*.

#### IV-3 El Caso Homogéneo. Estructuras en el Espacio de Fases

Construiremos las Secciones de Poincaré a partir de las intersecciones del flujo dinámico con el plano  $\phi_1 = 0$ . De esta manera analizaremos la dinámica en el plano  $a - \pi$ . Si la simetría conforme no estuviera rota, por la presencia de la masa, el problema sería integrable y existiría una separatriz dividiendo el espacio de fases en dos regiones. La primera, alrededor del origen donde el movimiento es ligado, estaría cubierta con toros invariantes. La segunda, correspondería a trayectorias no ligadas que, desde cualquier

lugar que se inicien se aproximarían asintóticamente a una solución del tipo deSitter. En ambas regiones el movimiento sería regular.

Debido al término de masa la separatriz es substituída por una capa estocástica. En esta capa los toros, correspondientes a la región interior, son reemplazados por nuevas estructuras: *cantors* e *islas de estabilidad*. Los primeros son toros no totalmente rotos, sino que presentan agujeros, algunas trayectorias pueden escapar a través de ellos mientras que otras permanecen confinadas en la capa estocástica. Las islas se forman alrededor de los puntos elípticos que reemplazan a los toros resonantes.

Hemos construido las secciones de Poincaré (definidas por  $\phi = 0$ ), para este modelo homogéneo. El valor de la masa que se ha utilizado es  $m = 0.65$ , mientras que como constante cosmológica se tiene  $\Lambda = 1/8$ . Ambos valores son adecuados tanto desde el punto de vista teórico, como de implementación del modelo; se puede comprobar que los rasgos generales de la solución del problema son independientes de esta elección particular.

La Fig.19 es una vista general de la región de la sección de Poincaré accesible al sistema pero donde, por claridad, sólo se han marcado las trayectorias no ligadas. Sobreimpuesta sobre los puntos correspondientes a los estados del sistema está la solución analítica correspondiente a  $m = 0$ , es decir, al caso de simetría conforme que conduce a una etapa inflacionaria (cf. ec.(IV.7)).

Efectivamente la línea sólida corresponde a la separatriz de la dinámica no perturbada, la separación entre ésta y los puntos de la simulación numérica se puede considerar una medida del ancho de la capa estocástica. Se observa claramente que todas las órbitas que se alejan lo suficiente de la región ligada se aproximan a la trayectoria (inflacionaria) esperada. Esta es una confirmación de que el modelo, luego de alguna evolución dinámica no trivial, verifica el principio de "calvicie cósmica".

Como se ha dicho, las secciones consisten en sólo dos variables, que hemos elegido como las más lentas, es decir,  $a$  y  $\pi$ . Entonces, cada uno de los toros está caracterizado por un valor de  $p_1$  (o equivalentemente de  $j_1$ ). La Fig.20 muestra una vista general de la sección, el gráfico corresponde a cerca de un centenar de condiciones iniciales distintas,

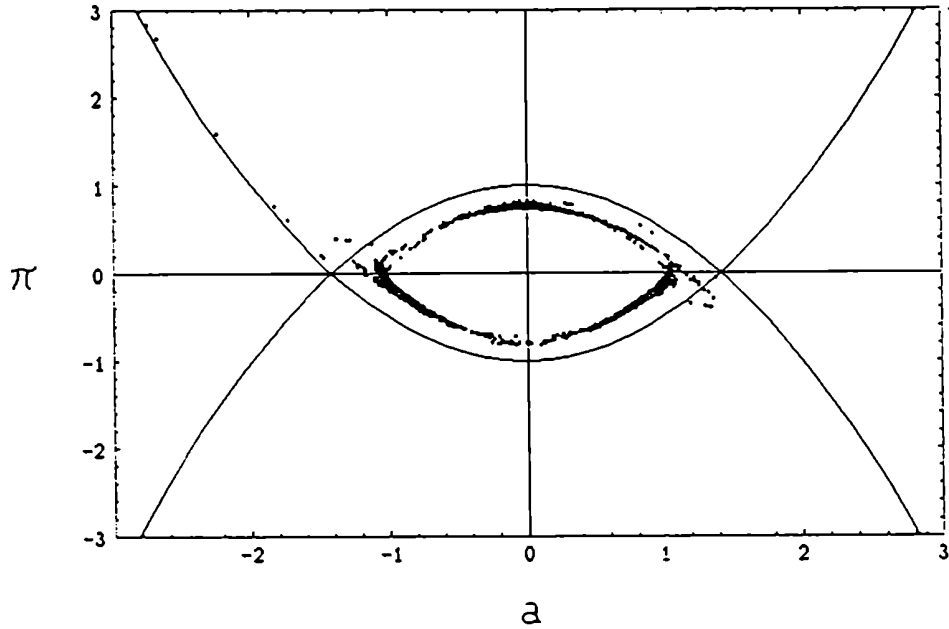


Figura 19. Sección de Poincaré en el plano  $\phi_1 = 0$ . Sólo se muestran las trayectorias no ligadas. La línea sólida corresponde a la separatriz del caso conforme  $m = 0$ .

todas ellas corresponden a  $a = 0$ ,  $\phi_1 = 0$ , diferenciándose por el valor de  $p_1$  que se varió hasta llegar a  $p_1 = 0.512$  ( $\pi$  quedó determinado por el vínculo Hamiltoniano). Se pueden apreciar los toros interiores, que se preservan intactos, y donde los puntos que los determinan parecen ajustar sobre una curva suave.

Notemos, sin embargo, que dichos puntos no están ordenados en forma secuencial, así, cada toro corresponde a numerosas vueltas alrededor del origen (en lenguaje cosmológico a varios ciclos cósmicos). Moviéndonos hacia afuera del gráfico se ve la aparición de “órbitas” correspondientes a toros KAM rotos, luego de algunas vueltas los puntos correspondientes escapan hacia un valor asintótico correspondiente a una solución de DeSitter. Más hacia afuera un nuevo conjunto de trayectorias estables forma un patrón triangular de islas (el número de islas indica que estamos en presencia de una resonancia de orden 3). Esta cadena de islas secundarias rodea el centro en forma simétrica. Aparece una ligera asimetría en las dos islas inferiores, debido a la ruta de escape al infinito, que puede atribuirse a la elección particular de condiciones iniciales. Hemos comprobado que, a medida que la masa del campo aumenta, el último toro no roto se va desplazando hacia el centro: pero en la medida que la amplitud adiabática no se anula.

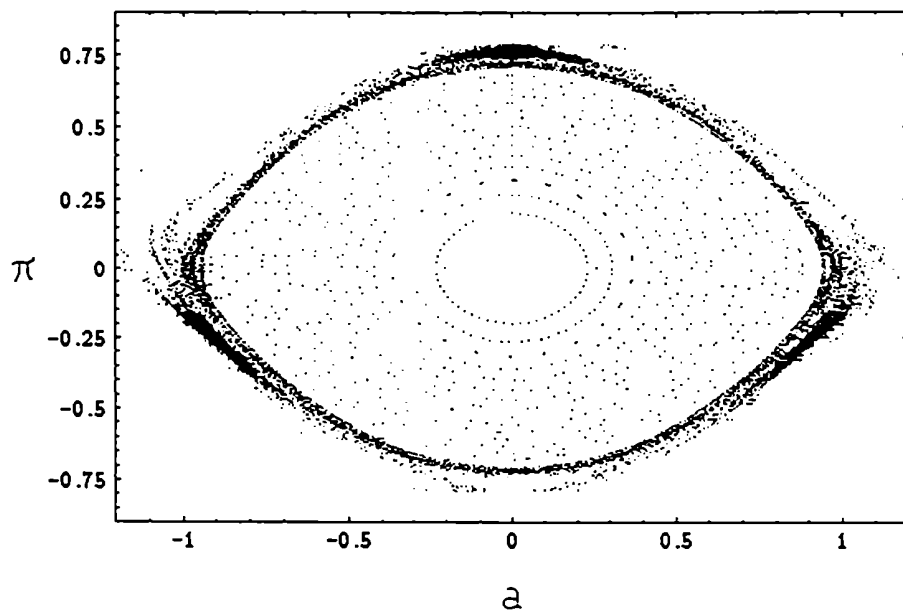


Figura 20. Lo mismo que la Fig.19, incluyendo la región de movimiento cuasiperiódico. Se aprecian claramente tres islas de estabilidad secundarias.

dicha órbita nunca alcanza el origen de la sección de Poincaré a causa del término de acoplamiento no lineal (para no violar el vínculo Hamiltoniano, cf. ec.(IV.6)).

La Fig.21 exhibe una ampliación de la isla superior. Se ven algunos toros no rotos, luego una región KAM y posteriormente la isla de estabilidad que substituye a los toros correspondientes. Como es bien sabido, en los sistemas no integrables existe una jerarquía infinita de tal manera que alrededor de cada isla secundaria hay un conjunto de islas de tercer orden, alrededor de cada una de estas existe una cadena de islas de cuarto orden y así siguiendo. A medida que el orden en la jerarquía crece el tamaño de las islas correspondientes decrece. Este comportamiento se puede apreciar en la figura, donde se ve claramente una cadena de islas terciarias.

Encontramos que no todas las órbitas en la capa estocástica escapan al infinito, algunas de ellas se mantienen por más de 300 iteraciones del mapa, sin signos aparentes de desestabilizarse. No se observa una separación clara entre órbitas estables e inestables, algunas órbitas inestables son seguidas por otras estables. Este efecto de intermitencia es una clara indicación de la formación de *cantors*: después del último toro no roto se forma una capa de toros que se rompen gradualmente, como si el toro se fuera

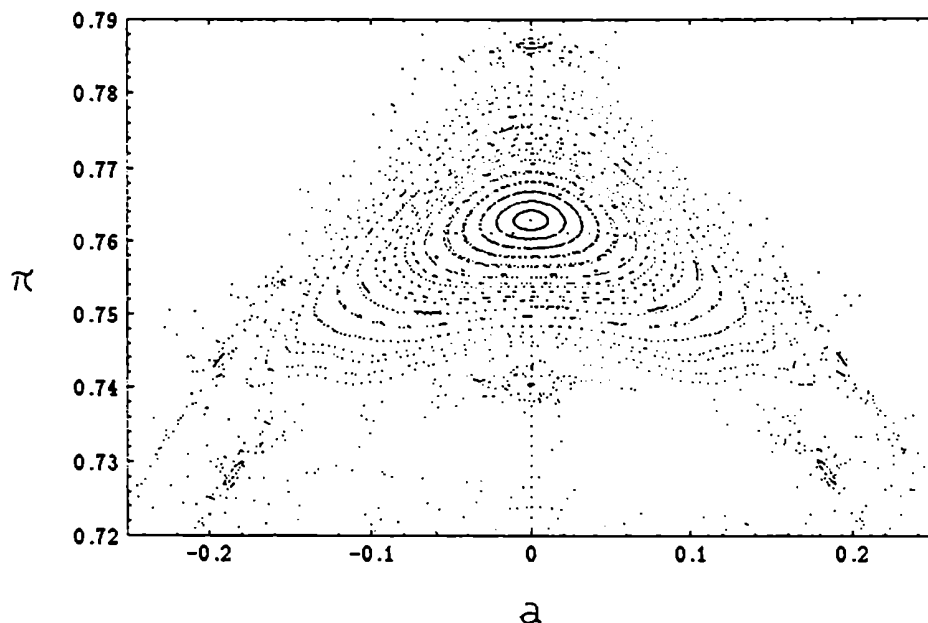


Figura 21. Ampliación de la isla superior de la figura anterior. Se aprecia la aparición de islas de tercer orden.

des- truyendo por sectores: algunas trayectorias consiguen escapar sólo luego de un largo período de rebotes dentro de la capa estocástica, mientras que otras podrían permanecer confinadas por siempre, y es de esperar, debido al *teorema de Liouville*, que otras desde el exterior penetren, y sean atrapadas, en el mar estocástico.

Como otra forma de resaltar la diversidad en el comportamiento dinámico, hemos calculado los exponentes de Lyapunov del sistema para tres trayectorias diferentes. correspondientes a un toro no roto, a uno roto que conduce a movimiento irregular o caótico, y a una trayectoria estable dentro de las islas secundarias. En la medida que estudiemos el modelo en la región no ligada del espacio de fases, los exponentes de Lyapunov no son de mucha utilidad como indicadores de comportamiento irregular o caótico, pero si pueden considerarse una medida de la escala de tiempo en la cual el sistema se desestabiliza. En la Fig.22 mostramos el máximo exponente de Lyapunov para una trayectoria inestable con condiciones iniciales  $a_1 = a = 0$ ,  $p_1 = 0.736$ . Se observa que luego de una etapa transitoria inicial. el exponente se vuelve positivo durante varios períodos de recurrencia sobre la sección de Poincaré. nunca se estabiliza y sobre el final crece abruptamente debido al caracter no ligado de la órbita elegida. Por otra parte.

cálculos similares con condiciones iniciales dentro de la isla central, o de las secundarias, muestran que luego del transitorio los exponentes respectivos tienden lentamente a cero, como corresponde a trayectorias estables.

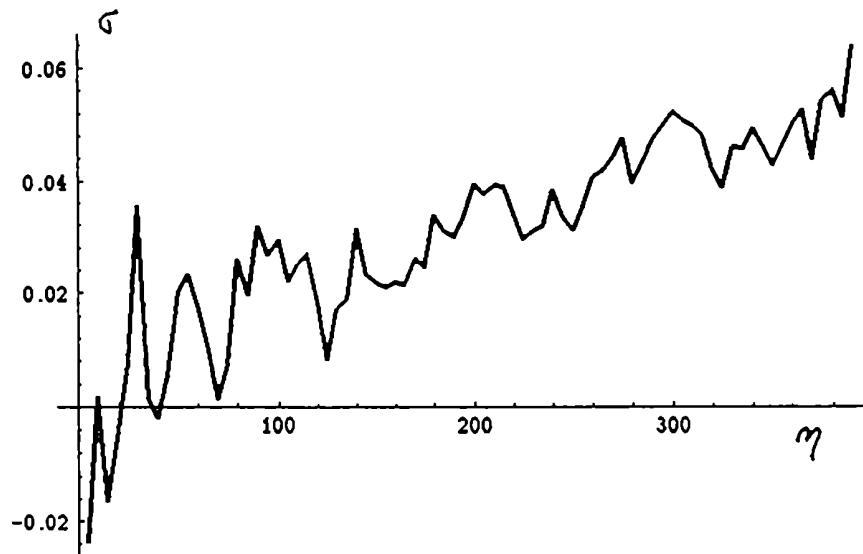


Figura 22. Máximo exponente de Lyapunov para una trayectoria inestable (con condiciones iniciales  $\phi_1 = a = 0$ ,  $p_1 = 0.736$ ). Nótese que nunca se estabiliza y sobre el final crece abruptamente debido al carácter no ligado de la órbita elegida.

#### IV-4 El Caso Inhomogéneo. Difusión de Arnold

Vamos a añadir un segundo modo, inhomogéneo, al campo de radiación. De esta manera podremos analizar la reacción del modelo ante un aumento del número de grados de libertad del sistema. El caso de tres grados de libertad ha sido mucho menos estudiado en TSD. El espacio de fases tiene ahora seis dimensiones, si lo dividimos con un plano la Sección de Poincaré resultante es ahora de cuatro dimensiones, lo cual es mucho más difícil de visualizar que la superficie bidimensional correspondiente al problema con dos grados de libertad.

En el caso de los sistemas integrables hay, además del Hamiltoniano, otras dos integrales de movimiento. Por lo tanto la secuencia de puntos yace sobre un subconjunto bidimensional de la sección. Si el sistema es no integrable, pero hay una región donde el teorema KAM se aplica, también esperaríamos tener toros bidimensionales. En la situación opuesta, un sistema completamente ergódico, los puntos cubrirían una región de cuatro dimensiones en la sección de Poincaré. Así, la dimensión de la variedad ocupada por la secuencia de puntos está comprendida entre 2 y 4.

Existen diversas técnicas para estudiar esta clase de sistemas, la que aplicaremos aquí consiste en proyectar el espacio cuatridimensional de la sección de Poincaré en tres dimensiones, descartando una de las cuatro coordenadas. Si la secuencia de puntos yace en un subconjunto bidimensional de la sección, también lo hará su proyección en el espacio reducido. Esencialmente hay dos métodos que trabajan con esta técnica. La primera ha sido desarrollada por Froeschlé [Froeschlé 1970], y consiste en proyectar estereoscópicamente los puntos de la sección. En la segunda se tiene en cuenta que la probabilidad de que un punto caiga sobre una superficie arbitraria es cero, por lo tanto el plano que se utiliza para definir la sección tiene un espesor finito [Froeschlé 1972]. Este es un camino intermedio entre proyectar sobre alguna variable, es decir, ignorar por completo los valores que toma, o fijar exactamente el valor de dicha variable. Nosotros hemos proyectado directamente sobre la sección, pero comprobamos que si restringíamos  $\phi_2$  a una banda de espesor  $10^{-3}$  nuestros resultados no cambiaban sustancialmente.

Por otra parte, hay una propiedad fundamental que distingue los sistemas con tres o más grados de libertad de aquellos con sólo dos: la *difusión de Arnold*. En sistemas con sólo dos grados de libertad las regiones caóticas están siempre separadas por toros no rotos invariantes, estos toros actúan como barreras infranqueables en la sección de Poincaré. Pero con tres o más grados de libertad hay dimensiones extra en el espacio de la sección que las trayectorias pueden utilizar para sortear dichos toros y, en principio, explorar la totalidad del espacio fásico. Desafortunadamente este comportamiento es muy difícil de visualizar numéricamente y sólo tiene sentido estudiarlo muy cerca de la frontera de la región caótica.

Si, en nuestro modelo específico, el campo de radiación fuera no masivo tendríamos otras dos integrales de movimiento, las acciones  $j_1 = (p_1^2 + o_1^2)/2$  y  $j_2 = (p_2^2 + o_2^2)/2$



asociadas a los modos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  respectivamente. De tal forma el sistema sería integrable. Al ser  $m \neq 0$  es de esperar que el sistema exhiba un comportamiento más interesante.

La Fig.23 muestra una trayectoria estable del modelo inhomogéneo, esta trayectoria corresponde a más de mil iteraciones sobre la sección de Poincaré.

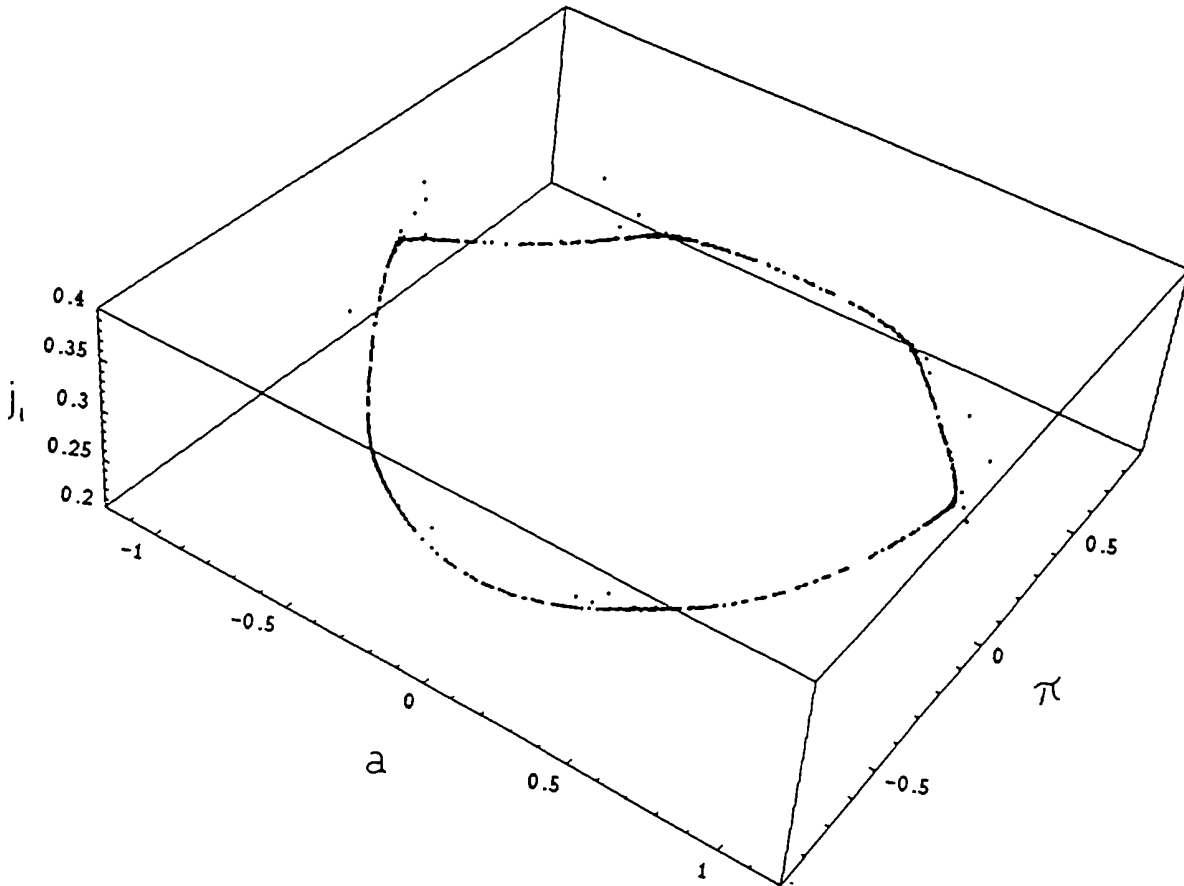


Figura 23. Sección de Poincaré para una trayectoria estable del modelo inhomogéneo. Las condiciones iniciales corresponden a  $\phi_1 = \phi_2 = a = 0, p_1 = 0.7293, \pi = 0.7295$ . Se aprecia claramente la no conservación de la amplitud adiabática asociada al modo homogéneo.

Las condiciones iniciales corresponden a  $\phi_1 = \phi_2 = a = 0, p_1 = 0.7293, \pi = 0.7295$  y  $p_2$  determinado a partir del vínculo Hamiltoniano. Se puede ver que la trayectoria parece ajustar bastante bien sobre una curva, mientras que se aprecia claramente la no conservación de la amplitud adiabática asociada al modo homogéneo. Asimismo,

se observan algunos puntos de escape, estos corresponden a los últimos evaluados y su dispersión puede ser un reflejo del comienzo de la inestabilidad del sistema o atribuirse a inexactitudes numéricas en la integración.

La Fig.24 corresponde a una órbita caracterizada por otro conjunto, muy próximo, de condiciones iniciales ( $\phi_1 = \phi_2 = a = 0, p_1 = 0.7293, \pi = 0.7294$  y  $p_2$  se obtiene como antes).

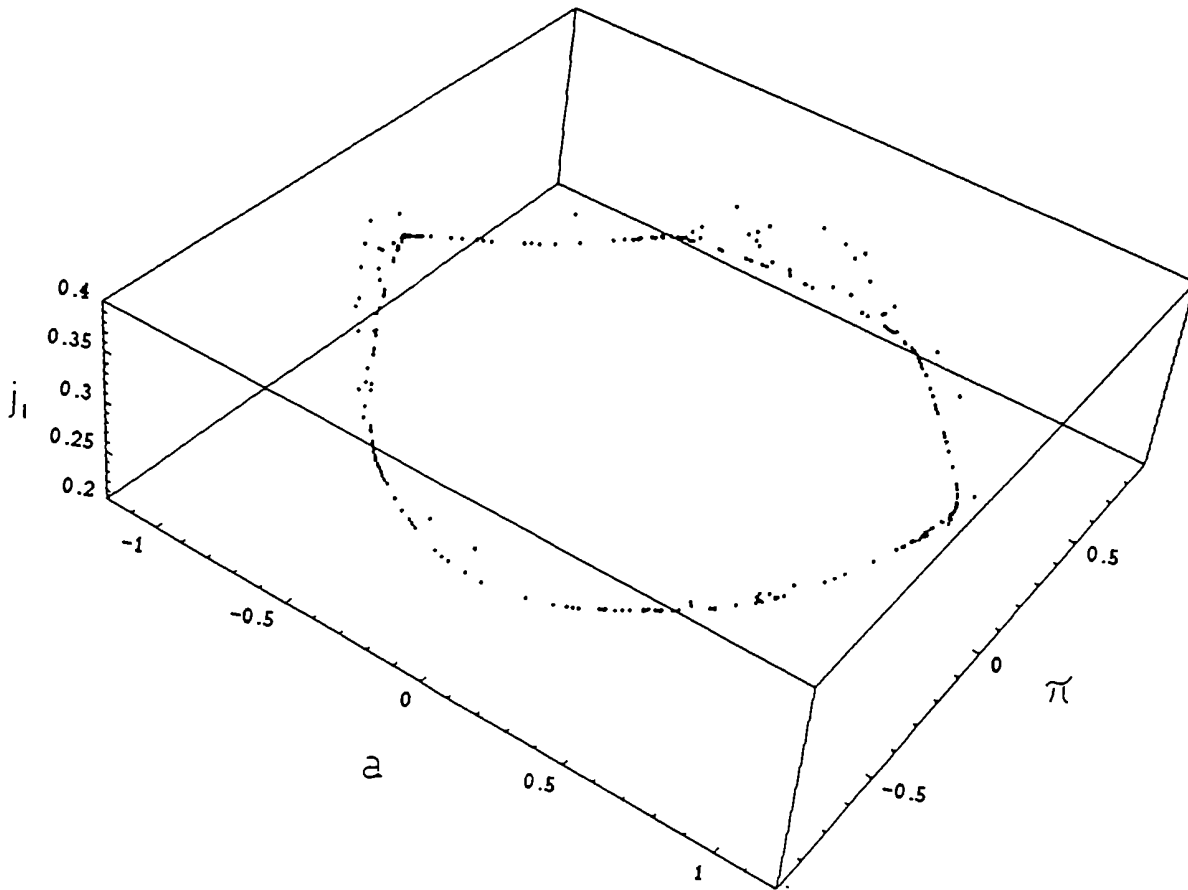


Figura 24. Lo mismo que la Fig.23 para una órbita caracterizada por otro conjunto, muy próximo, de condiciones iniciales ( $\phi_1 = \phi_2 = a = 0, p_1 = 0.7293, \pi = 0.7294$ ). Esta órbita es mucho menos estable que la anterior.

Esta órbita es mucho menos estable que la anterior, el vínculo Hamiltoniano sólo se preservó durante un período cinco veces menor. Esta trayectoria difícilmente se pueda ajustar con una curva, antes bien parece cubrir una superficie (o aún un volumen). en el espacio de la sección. Lo más relevante para nuestro propósito es resaltar que las condiciones iniciales se eligieron para obtener una trayectoria más estable. en principio. que la anterior (utilizamos el mismo  $p_1$ , pero un valor de  $\pi$  más bajo en este segundo caso), pero el resultado parece ser exactamente el opuesto.

Para corroborar los resultados anteriores la Fig.25 muestra una comparación entre los exponentes de Lyapunov locales asociados a cada trayectoria.

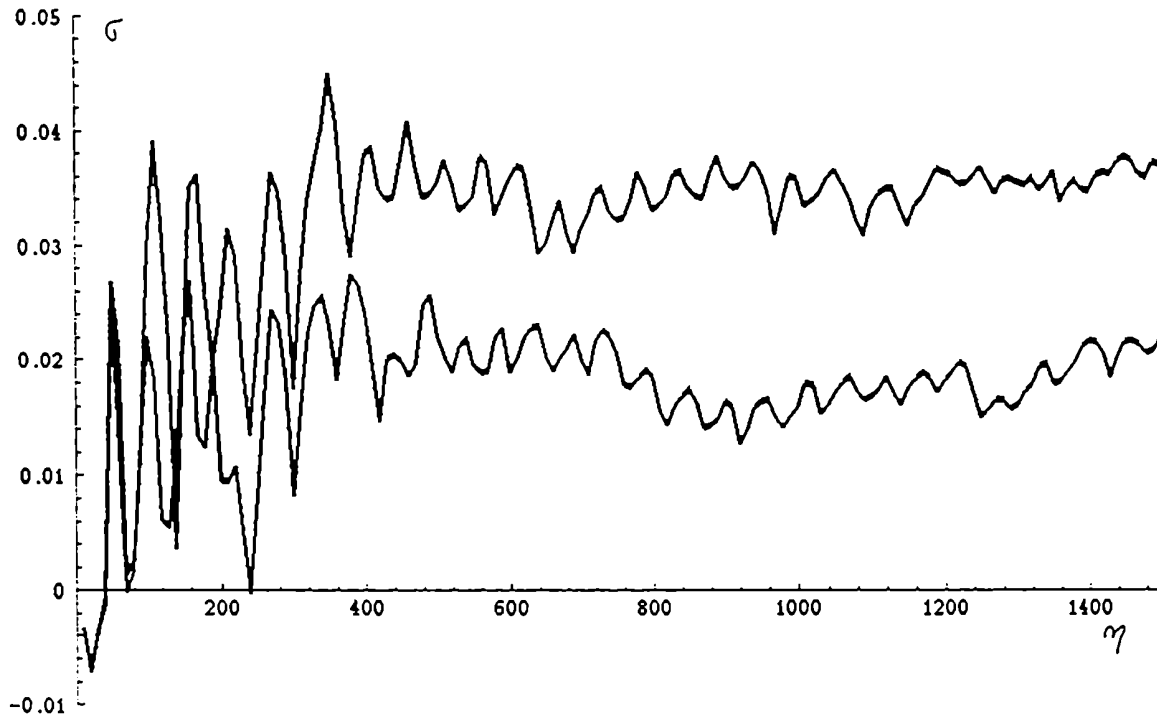


Figura 25. Comparación entre los exponentes de Lyapunov locales asociados las trayectorias de las Figs.23-24. El superior corresponde a la segunda órbita y su valor es aproximadamente el doble del correspondiente a la primera. Ésta es claramente más estable a pesar de pertenecer a una región más externa de la capa estocástica.

El gráfico superior corresponde a la segunda órbita y su valor es aproximadamente el doble del correspondiente a la primera. El de ésta es claramente más estable a pesar del hecho de pertenecer a una región más externa de la capa estocástica. La indicación de la existencia de un proceso de difusión de Arnold es clara. existe una posibilidad cierta de que órbitas interiores “salten” sobre otras más estables y se aproximen asintóticamente a la solución de deSitter. De esta manera tenemos un mecanismo clásico para comenzar la inflación en forma adecuada, sin necesidad de especificar ningún valor particular sobre las condiciones iniciales del sistema.

Concluimos esta sección con dos diagramas en el espacio de condiciones iniciales.

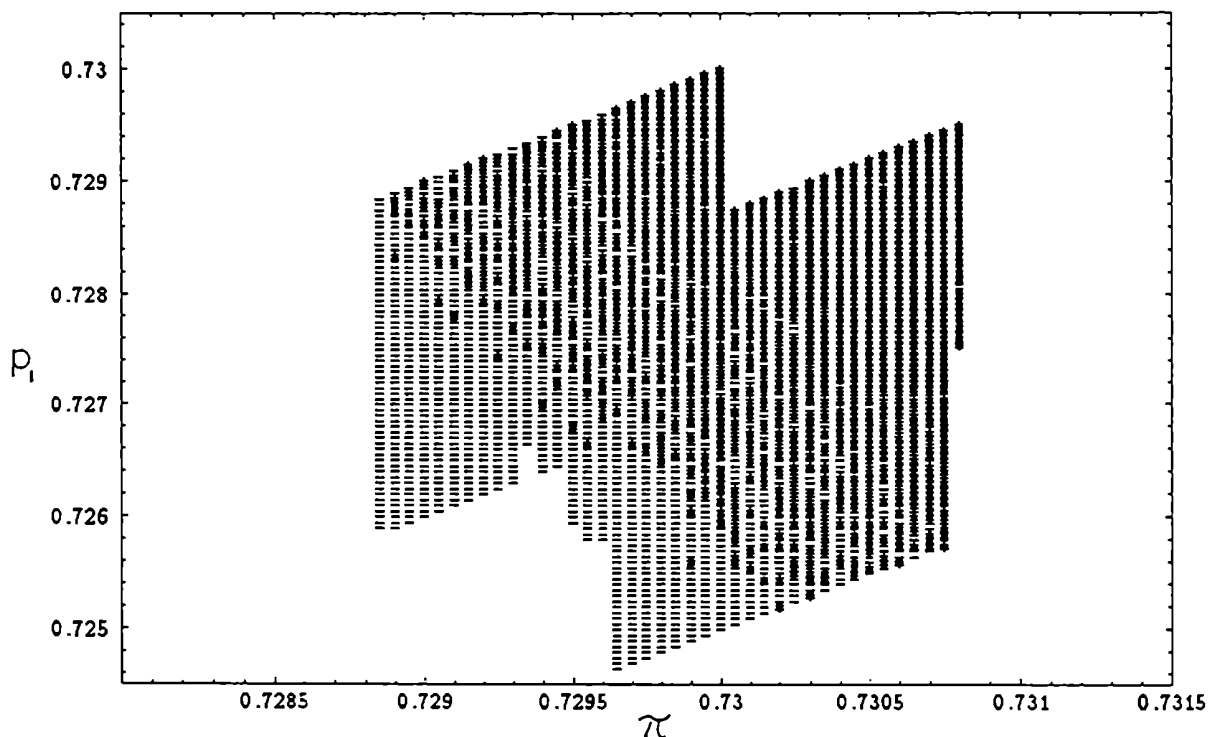


Figura 26. Espacio de condiciones iniciales  $p_1 - \pi$ . El sector corresponde a  $0.725 < p_1 < 0.73$  y  $0.7288 < \pi < 0.7308$ . Las “-” indican trayectorias inestables: es decir, que no alcanzan las 500 recurrencias sobre la sección de Poincaré.

Para obtener la Fig.26 tomamos, nuevamente,  $\phi_1 = \phi_2 = a = 0$ , y consideramos el sector  $0.725 < p_1 < 0.73$  y  $0.7288 < \pi < 0.7308$ , determinando  $p_2$  a partir del vínculo Hamiltoniano. Dadas más de 3000 condiciones iniciales en el plano  $p_1 - \pi$  se dejó evolucionar el sistema hasta que se violara el vínculo (síntoma de que la trayectoria correspondiente era inestable), o hasta alcanzar las 500 recurrencias sobre la sección de Poincaré. que tomamos como indicación, a los efectos prácticos, de que la trayectoria era estable. Las estrellas corresponden a las órbitas inestables.

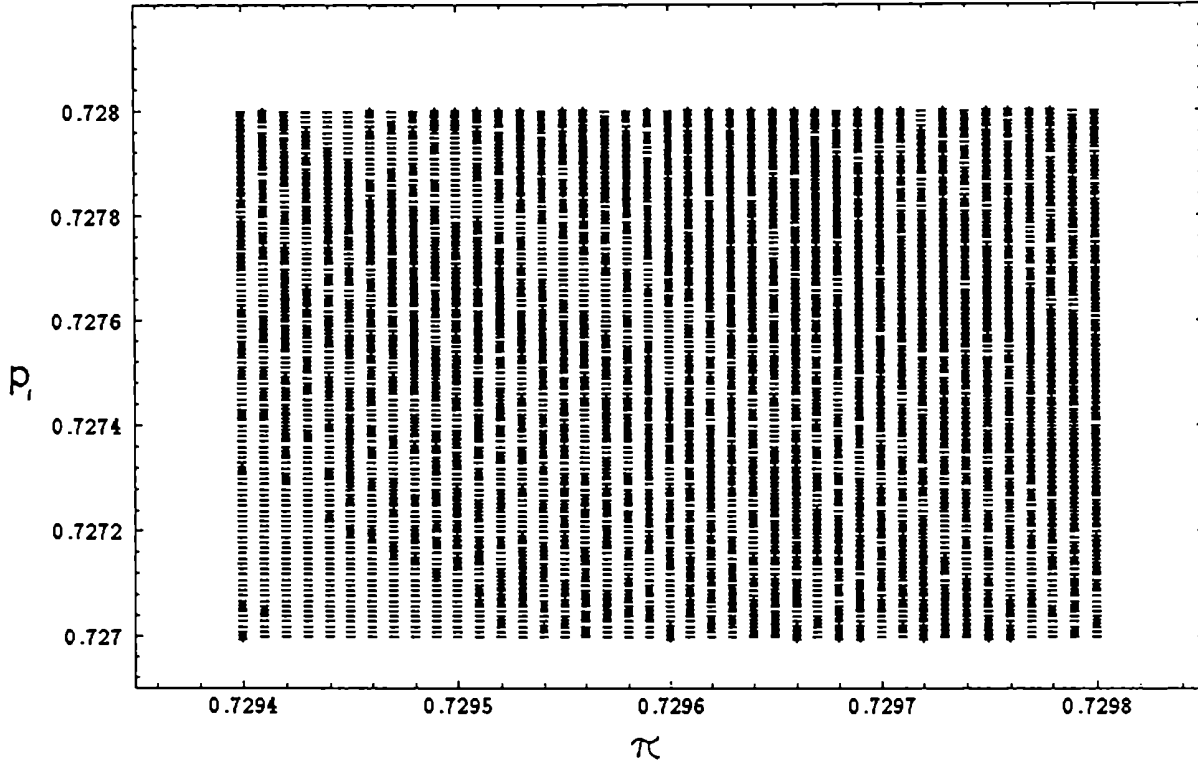


Figura 27. Ampliación de la región central de la figura anterior. El sector está definido ahora por  $0.727 < p_1 < 0.728$  y  $0.7294 < \pi < 0.7298$ , pero la distancia entre puntos es cinco veces menor.

Puede observarse la ausencia de una división nítida entre éstas y las trayectorias estables, como así también la presencia de órbitas inestables bien en el interior de la región regular: esto indica que, aún comenzando en la región regular, cualquier perturbación nos puede enviar fuera de ella. Así, el gráfico *sugiere* la existencia de una red o malla (la red de Arnold), que conecta la (casi) totalidad del espacio de fases y es indicativo de que

trayectorias que comienzan con una dada condición inicial pueden “cruzarse” y evolucionar como otra órbita con condiciones iniciales totalmente diferentes. Se obtiene así, un proceso de difusión Hamiltoniana, tal que, dado el tiempo suficiente, prácticamente cualquier trayectoria puede *explorar* la totalidad del espacio fásico. Obsérvese que nos hemos movido muy poco en el espacio de condiciones iniciales, el ancho de la región estudiada es de sólo de unas pocas milésimas.

La Fig.27 corresponde a una ampliación de la anterior, definida por  $0.727 < p_1 < 0.728$  y  $0.7294 < \pi < 0.7295$ , donde hemos barrido en el espacio de condiciones iniciales con un paso cinco veces menor. Es notable la similitud con el gráfico anterior, cuando nos internamos en escalas menores.

De lo que antecede se desprende que, aún cuando el Universo evolucione hacia una etapa de expansión inflacionaria, la formación de estructuras en el espacio de fases hace que esta evolución no sea trivial. Sus efectos podrían, en principio, extenderse a la totalidad de dicho espacio.

## CAPÍTULO V

### EFFECTOS NO LINEALES EN COSMOLOGÍA SEMICLÁSICA

En los capítulos previos hemos estudiado diversos efectos causados por contribuciones no lineales en cosmología clásica y vimos las consecuencias que la existencia de resonancias entre los distintos grados de libertad tenían sobre la evolución del sistema. Sin embargo, el marco natural para formular los problemas cosmológicos, en el Universo Temprano, es la Teoría Cuántica de Campos en el Espacio-Tiempo Curvo (TCCETC) [Birrel y Davies 1982]. En efecto, debido a las energías puestas en juego durante ese período es necesario tener en cuenta la naturaleza cuántica de los campos que *pueblan* el Universo. Sin embargo, dado que rápidamente los niveles de energía caen muy por debajo de la Energía de Planck, es posible desprestigiar los efectos cuánticos asociados al campo gravitatorio y la geometría de fondo puede ser tratada clásicamente.

Por supuesto, cuando se estudia la TCCETC usualmente se está interesado en examinar fenómenos que se deben a la no trivialidad de la geometría o la topología. Algunos efectos bien conocidos son: la creación cosmológica de partículas [Parker 1969], el rol de los términos de polarización de vacío en el tensor energía - momento renormalizado  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$  [Fischetti, Hartle y Hu 1979], la dependencia del “potencial efectivo” o de la “acción efectiva” con la métrica de fondo [Hu y O’Connor 1984], etc. El formalismo que surge naturalmente en este marco permite estudiar en forma autoconsistente la dinámica del universo primitivo, teniendo en cuenta las correcciones cuánticas.

En particular, es de sumo interés el estudio del período de *recalentamiento*, que ocurre hacia el final de la etapa inflacionaria [Abbott, Farhi y Wise 1982]. Los primeros estudios sobre esta etapa se efectuaron considerando un acoplamiento fenomenológico entre el inflatón y la radiación constituida por sus propias fluctuaciones cuánticas [Albrecht et al. 1982]. Usando las ecuaciones que surgen naturalmente en el marco de la TCCETC es posible reproducir estos resultados, a partir de *primeros principios*, mejorando nuestra comprensión acerca de como ocurre el recalentamiento (cómo se crean

partículas y concluye la inflación ) [Mazzitelli, Paz y El Hasi 1989]. En efecto, las técnicas desarrolladas y utilizadas en la TCCETC son extremadamente útiles al estudiar el problema, debido a que los campos acoplados al inflatón  $\phi$  adquieren una masa variable (a causa de la dependencia de  $\phi$  con  $t$ ). Esta masa actúa como una fuente externa que crea partículas disipando la energía del inflatón. Mostraremos que el factor predominante, en el desarrollo de este fenómeno, es la aparición de resonancias entre los modos asociados a las partículas creadas y el inflatón (para una referencia anterior sobre el tema se puede ver, por ejemplo [Hartle 1981; Calzetta y Castagnino 1984]).

Vamos, entonces, a estudiar el período de recalentamiento, es decir, la etapa en la cual la energía del inflatón se disipa en radiación para el modelo de *nueva inflación*. En este modelo se supone que ocurre una transición de fase en la escala de la Teoría de Gran Unificación (TGU), y casi todos los efectos gravitatorios no triviales, lejos de la escala de Planck, pueden ser despreciados.

Para ser más precisos, resumamos el comportamiento del *inflaton*, que puede ser considerado como una magnitud clásica, en modelos inflacionarios de este tipo. A altas temperaturas, el potencial efectivo tiene un único mínimo en  $\phi = 0$ . A medida que el universo se enfría, la forma del potencial cambia drásticamente y aparece un mínimo verdadero en  $\phi = \phi_m \neq 0$ , mientras que el campo escalar es atrapado en el falso vacío  $\phi = 0$ . Luego, y debido a algún mecanismo que no discutiremos [Guth y Pi 1985; Calzetta 1989], el campo escalar comienza un lento camino de descenso (el "slow roll-over") hacia el vacío verdadero ( $\phi = \phi_m$ ). Durante este período, cuando la densidad de energía está dominada por la contribución estática del potencial efectivo, ocurre la inflación dado que  $V_{ef}(\phi) \simeq V_{ef}(0)$  actúa como una constante cosmológica efectiva. Posteriormente, el campo oscila rápidamente alrededor de  $\phi = \phi_m$  y se crean partículas de todos los campos acoplados al inflatón (éste es el régimen que nos interesa estudiar). La energía del campo escalar es así convertida en radiación y las oscilaciones se amortiguan. La producción de partículas incrementa la temperatura del universo, por eso este período se denomina *recalentamiento*.

Como dijimos, efectuaremos nuestro análisis a partir de *primeros principios*, es decir, utilizando las ecuaciones que se derivan en el marco de la TCCETC:



$$-\Box\phi + \langle V'(\phi) \rangle = 0 , \quad (\text{V.1a})$$

$$G_{\mu\nu} = m_p^{-2} \langle T_{\mu\nu}(\phi) \rangle , \quad (\text{V.1b})$$

donde  $G_{\mu\nu}$  corresponde al tensor de Einstein y  $\langle \dots \rangle$  corresponde a los valores de expectación cuánticos. Dado que el Universo se encuentra en proceso de expansión, su comportamiento dinámico es de relativo interés. Consideraremos, entonces, la presencia de un campo de radiación escalar como medio de disipar la energía del inflatón, a través de la reacción que la creación de partículas de dicho campo tiene sobre la ecuación de evolución del inflatón.

### V-1 Ecuaciones Autoconsistentes del Sistema

La notación y convenciones serán las mismas de los capítulos precedentes, pero ahora la acción gravitatoria está dada por

$$S_g = \int d^n x \sqrt{-g} [m_p^2 (R - 2\Lambda) - \epsilon_1 R^2 - \epsilon_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \epsilon_3 R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}] . \quad (\text{V.2})$$

Incluimos los términos cuadráticos en la acción debido a que son necesarios para la renormalización. El tensor de Einstein generalizado se define como,

$$\begin{aligned} m_p^2 G_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_g}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= m_p^2 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) + \epsilon_1 H_{\mu\nu}^{(1)} + \epsilon_2 H_{\mu\nu}^{(2)} + \epsilon_3 H_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Los tensores  $H_{\mu\nu}^{(1)}$ ,  $H_{\mu\nu}^{(2)}$  y  $H_{\mu\nu}$  resultan ser combinaciones *no lineales* de  $R$ ,  $R_{\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  y sus derivadas, la forma general de los mismos puede verse en [Birrel y Davies 1982].

Debido al teorema de Gauss - Bonnet, en cuatro dimensiones el tensor  $H_{\mu\nu}$  es una combinación lineal de  $H_{\mu\nu}^{(1)}$  y  $H_{\mu\nu}^{(2)}$ ,  $H_{\mu\nu} = -H_{\mu\nu}^{(1)} + 4H_{\mu\nu}^{(2)}$ .

La acción para el inflatón más un campo escalar de radiación es:

$$S_f = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + (m_\phi^2 + \xi_\phi R) \phi^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^4 + \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + (m_\varphi^2 + \xi_\varphi R) \varphi^2 + h \varphi^2 \phi^2] . \quad (V.4)$$

Denotemos por  $\phi_0(\mathbf{x}, t)$  el valor medio (en promedio cuántico) del campo  $\phi(\mathbf{x}, t)$  y por  $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)$  la fluctuación del mismo,

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \phi_0(\mathbf{x}, t) . \quad (V.5)$$

A partir de las Ecs. (V.2) y (V.4) es fácil mostrar que en la aproximación de un lazo (es decir a primer orden en  $\hbar$ ), las ecuaciones de campo son:

$$-\square \phi_0 + (m_\phi^2 + \xi_\phi R) \phi_0 + \lambda \phi_0^3 + h \phi_0 \langle \varphi^2 \rangle + 3\lambda \phi_0 \langle \hat{\phi}^2 \rangle = 0 , \quad (V.6a)$$

$$m_p^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(\phi_0) + \langle \tilde{T}_{\mu\nu}(\varphi) \rangle + \langle \tilde{T}_{\mu\nu}(\hat{\phi}) \rangle , \quad (V.6b)$$

$$-\square \varphi + [m_\varphi^2 + h \phi_0^2 + \xi_\varphi R] \varphi = 0 , \quad (V.6c)$$

$$-\square \hat{\phi} + [m^2 + 3\lambda \phi_0^2 + \xi_\phi R] \hat{\phi} = 0 . \quad (V.6c)$$

Por simplicidad, supondremos que el acoplamiento entre  $\phi$  y  $\varphi$  es muy débil, respecto del que existe entre el inflatón y sus propias fluctuaciones cuánticas (concretamente, pediremos que  $h \ll \lambda$ ), e ignoraremos la ecuación para la fluctuación en la discusión que sigue. Se puede mostrar, efectuando el análisis completo del sistema, que esta hipótesis

es consistente en la medida que, como se verá más adelante, la creación de cuantos asociados al campo  $\hat{\phi}$  está fuertemente suprimida y, así, su efecto sobre la dinámica puede despreciarse.

En la Ec.(V.6b)  $\tilde{T}_{\mu\nu}(\varphi)$  denota el operador tensor de energía - momento de un campo libre, con masa variable dada por  $m_\varphi^2 + h\phi_0^2$ . Como en toda Teoría Cuántica de Campo, los valores de expectación que aparecen en las (V.6) son infinitos y deben ser renormalizados. El proceso de renormalización se efectúa siguiendo técnicas estándar (ver por ejemplo: [Paz y Mazzitelli 1988]).

Debido a que luego de la inflación la curvatura espacial se vuelve muy pequeña consideraremos el caso particular de un espacio-tiempo con secciones espaciales planas ( $k = 0$ , en la terminología de los capítulos anteriores), con elemento de línea:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= a^2(\eta)(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) , \end{aligned} \quad (V.7)$$

donde  $t$  denota el tiempo cosmológico y  $\eta$  el conforme.

Además, supondremos que el inflatón es un campo homogéneo ( $\langle\phi(x,t)\rangle = \phi_0(t)$ ), que ambos campos son no masivos ( $m_\phi = m_\varphi = 0$ ),  $\varphi$  está acoplado conformemente al escalar de Ricci  $R$  ( $\xi_\varphi = \frac{1}{6}$ ) y, como siempre,  $\xi_\phi = 0$ . En este caso las ecuaciones renormalizadas resultan (escribimos sólo la parte temporal de la Ec.(V.6b)) [Mazzitelli, Paz y El Hasi 1989],

$$-\square\phi_0 + V'_{ef}(\phi_0) + h\phi_0\langle\varphi^2\rangle_{ren} = 0 , \quad (V.8a)$$

$$H^2 + \epsilon(\dot{H}R - 2H\dot{R}) = \frac{3}{m_p^2}[T_{00}^{ef}(\phi_0) + \langle\tilde{T}_{00}(\varphi)\rangle_{ren}] , \quad (V.8b)$$

$$-\square\varphi + [h\phi_0^2(t) + \frac{1}{6}R]\varphi = 0 , \quad (V.8c)$$

donde  $\langle \dots \rangle_{ren}$  denota las respectivas cantidades renormalizadas,  $\epsilon$  es una constante relacionada a  $\epsilon_1$  (cf. Ec.(V.3)), el punto indica derivada respecto de  $t$ , la derivada del potencial efectivo (el potencial de Coleman - Weinberg [Coleman y Weinberg 1973]) está dada por

$$V'_{ef}(\phi_0) = \lambda \phi_0^3 + \frac{9\lambda^2}{16\pi^2} \phi_0^3 \left[ \ln \frac{\phi_0^2}{\mu^2} - \frac{11}{3} \right] + \frac{h^2}{32\pi^2} \phi_0^3 \ln \frac{\phi_0^2}{\mu^2}, \quad (V.9)$$

$T_{\mu\nu}^{ef}(\phi_0)$  es el tensor de energía - momento clásico del campo interactuante en el cual el potencial ha sido reemplazado por  $V_{ef}$ ,  $\mu$  es una constante que surge del proceso de renormalización y está asociada al mínimo del potencial y todas las constantes de acoplamiento se encuentran renormalizadas. Al final de la etapa inflacionaria la constante cosmológica se puede considerar nula.

Las Ecs.(V.8) son nuestro punto de partida. Los valores de expectación  $\langle \varphi^2 \rangle_{ren}$  y  $\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren}$  contienen información acerca del estado cuántico del campo, los efectos de polarización de vacío, y la producción de partículas. El cálculo de estos valores de expectación renormalizados no es trivial y se ha hecho siguiendo la receta prescripta en la Ref.[Paz y Mazzitelli 1988]. Veremos que, debido a su presencia, la energía del inflatón se convierte en radiación. Para mostrar esto es conveniente trabajar con las Ecs.(V.8) escritas en una forma más sencilla. De manera similar que en capítulos anteriores reparametrizaremos el campo como  $\chi = a\varphi$  y trabajaremos en tiempo conforme (utilizaremos  $t$  o  $\eta$  según resulte más conveniente para escribir las ecuaciones, denotando con  $'$  la derivada con respecto a  $\eta$ ), de esta forma el campo se puede desarrollar como:

$$\chi(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [a_{\mathbf{k}}\chi_{\mathbf{k}}(\eta) + a_{-\mathbf{k}}^\dagger\chi_{\mathbf{k}}^*(\eta)], \quad (V.10)$$

donde  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  y  $a_{\mathbf{k}}$  son los operadores de creación y aniquilación. Se puede ver que los modos del campo satisfacen

$$\chi_{\mathbf{k}}'' + [k^2 + h\phi_0^2 a^2]\chi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (V.11)$$

Esta ecuación corresponde a un oscilador de frecuencia variable  $\omega_k(\eta) = k^2 + h\phi_0^2(\eta)a^2(\eta)$ , y da lugar al estudio del fenómeno denominado *resonancia paramétrica* [Landau y Lifshitz 1960], debido a la dependencia del parámetro ( $\omega_k$ ) con el tiempo. Precisamente, en trabajos recientes, el fenómeno de resonancia paramétrica ha sido invocado como un mecanismo altamente eficiente de creación de partículas [Trashen y Brandenberger 1990; Kofman, Linde y Starobinsky 1994; Shtanov, Trashen y Brandenberger 1994].

Para resolver la Ec.(V.11), es conveniente introducir las funciones complejas  $\alpha_k(\eta)$  y  $\beta_k(\eta)$  las cuales están definidas por [Starobinsky 1984b],

$$\chi_k = (2\omega_k)^{-1/2}[\alpha_k(\eta)e_-(\eta) + \beta_k(\eta)e_+(\eta)] , \quad (V.12a)$$

$$\chi'_k = -i(\omega_k/2)^{1/2}[\alpha_k(\eta)e_-(\eta) - \beta_k(\eta)e_+(\eta)] , \quad (V.12b)$$

donde

$$e_{\pm}(\eta) = \exp[\pm i \int^{\eta} \omega_k(\eta') d\eta'] . \quad (V.13)$$

Entonces, la Ec.(V.11) es equivalente a (ver Apéndice C):

$$\alpha'_k = 3_k \omega'_k \epsilon_-^2 / 2\omega_k , \quad (V.14a)$$

$$\beta'_k = \alpha_k \omega'_k \epsilon_-^2 / 2\omega_k . \quad (V.14b)$$

con la condición de normalización  $|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$ .

Siguiendo la Ref.[Paz y Mazzitelli 1988], calculamos los valores de expectación renormalizados que aparecen en la Ec.(V.8) (para un esquema del cálculo ver Apéndice

D). El resultado para  $\varphi^2$  es (hemos despreciado todos los términos que son irrelevantes para nuestra discusión):

$$\langle \varphi^2 \rangle_{ren} \sim \frac{1}{8\pi^3 a^2} \int \frac{d^3 k}{\omega_k} |\beta_k|^2 . \quad (V.15)$$

Mientras que para el tensor energía - momento se obtiene:

$$\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren} \sim \frac{1}{8\pi^3 a^4} \int d^3 k \, \omega_k |\beta_k|^2 . \quad (V.16)$$

El sistema de Ecs.(V.8a ), (V.8b ), (V.14), (V.15) y (V.16) permite estudiar, a partir de *primeros principios*, el *slow roll* y el período de recalentamiento en la aproximación de un lazo. Por supuesto, para resolver el sistema se necesitan complicados cálculos numéricos. No obstante, durante la etapa de recalentamiento, es posible obtener cierta información mediante métodos analíticos aproximados.

## V-2 Creación de Partículas y Resonancias

Después del descenso lento el valor medio del campo del Inflatón oscila alrededor de  $\phi_m$ . Supondremos que durante el período de recalentamiento  $\phi_0$  tiene una solución de la forma:

$$\phi_0(t) = \phi_m(t) + B(t) \sin \int^t \Omega(t') dt' = \phi_m(t) + B(t) \sin \int^\eta \Omega(\eta') a(\eta') d\eta' , \quad (V.17)$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia de cuasi-oscilación del inflatón alrededor del mínimo de potencial y  $\phi_m(t)$  es solución de

$$\ddot{\phi}_m + 3H\dot{\phi}_m + V'_{eff}(\phi_m) = 0 . \quad (V.18)$$

Si  $H \ll \Omega, m_p$ , los efectos gravitatorios no serán importantes y como consecuencia  $\phi_m(t)$  estará dado, aproximadamente, por el valor (independiente del tiempo) del espacio-tiempo plano  $V_{ef}^{(plano)}(\phi_m) = 0$ . También supondremos que  $B(t) \ll \phi_m(t)$  y que  $(\dot{B}/B) \sim 1/\tau \ll \Omega$ ; es decir, el valor medio  $\phi_0(t)$  oscilará muchas veces antes de llegar a  $\phi_m$ . Notemos que  $\Omega$  no es un parámetro independiente, sino que está relacionado con la derivada segunda de  $V_{ef}$  de la siguiente forma:

$$\Omega^2 = V_{ef}''(\phi_0) \simeq \frac{1}{8\pi^2}(9\lambda^2 + \frac{h^2}{2})\phi_m^2 \sim \frac{1}{8\pi^2}9\lambda^2\phi_m^2. \quad (V.19)$$

El siguiente paso es calcular el número de partículas creadas  $N_k = |\beta_k|^2$ . Para esto utilizaremos el mismo método que en la referencia [Mazzitelli, Paz y El Hasi 1989], (puede verse también, aunque en otro contexto, [Starobinsky 1984b]). Tomaremos  $\alpha_k(\eta_0) = 1$  y  $\beta_k(\eta_0) = 0$  como condiciones iniciales, donde  $\eta_0$  es el instante en que comienza el recalentamiento. Aunque estas serían condiciones en el momento en que la simetría aún no está rota (antes del descenso lento), nuestra elección se justifica debido a que durante el descenso lento la producción de partículas es despreciable. Además, a primer orden en  $\beta_k$  se puede tomar  $\alpha_k \simeq 1$  para todo tiempo. Con estas aproximaciones y teniendo en cuenta la parametrización Ec.(V.17), la Ec.(V.14) se puede integrar usando el método de la fase estacionaria [Tabor 1989], suponiendo que los factores que varían más rápidamente con el tiempo son los oscilatorios. El resultado que se obtiene es:

$$|\beta_k(\eta)| = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \omega_k > \Omega a(\eta)/2 \\ |\beta_k(\infty)| \simeq \frac{ha^3\phi_m B}{2\omega_k} \left[ \frac{2\pi}{\Omega a\dot{a}} \right]^{1/2} \Big|_{\Omega a=2\omega_k} & , \text{ si } \omega_k < \Omega a(\eta)/2 \end{cases} \quad (V.20)$$

Aquí  $\omega_k^2 = k^2 + M_\varphi^2 a^2$  donde  $M_\varphi^2 = h\phi_m^2$  es la masa de las partículas creadas. Notemos que  $|\beta_k(\infty)|$  es una función de  $k$  a través de la dependencia explícita y también a través de la dependencia aparente en  $\eta$  que es una función de  $k$  debido a  $a(\eta) = 2\omega_k/\Omega$ . Como corresponde, la variación de la fuente externa  $\phi_0(t)$  excita modos del campo con  $\omega_k$  más bajos que la tasa de expansión  $\Omega$ . Supondremos que las partículas creadas son

ultrarrelativistas. es decir,  $M_\varphi \ll \Omega$  (o lo que es lo mismo  $\hbar \ll \lambda^2$ ). Vemos aquí que nuestra hipótesis de considerar nula la producción de partículas  $\hat{\phi}$  fue razonable, ya que para ellas siempre vale la condición  $\omega_k(\hat{\phi}) > \Omega a(\eta)/2$

Observemos que  $\omega_k = \Omega a/2$  corresponde a la condición (a orden más bajo) de resonancia paramétrica en la Ec.(V.11) [Landau y Lifshitz 1960]. Como hemos dicho, el efecto de recalentamiento por resonancia paramétrica entre el inflatón y los campos asociados a él ha recibido mucha atención, recientemente, como un mecanismo más eficiente para disipar la energía del inflatón, que lo que se obtiene mediante un cálculo perturbativo usual, aumentando en varios órdenes de magnitud la tasa de crecimiento de la energía de las partículas creadas durante el recalentamiento. Notemos que un mecanismo similar, de resonancia entre distintos grados de libertad, conduce a la no conservación de la variable de acción adiabática, y así a la aparición de la capa estocástica, en los modelos clásicos que discutimos en los capítulos anteriores.

Vemos que este resultado aparece naturalmente en nuestro formalismo. Esto se debe a que al integrar la Ec.(V.14), suponiendo que los campos son rápidamente oscilantes, la principal contribución proviene del término exponencial, que es estacionario cuando los dos campos oscilan con frecuencias muy próximas.

Por supuesto, dada la condición de resonancia  $\omega_k \sim \Omega a/2$ , los modos excitados serán aquellos para los cuales:

$$|k_{res}| \sim \sqrt{\Omega^2/4 - \hbar^2 \phi_m^2} \, a \, . \quad (V.21)$$

Por lo tanto, a medida que el Universo se expande, ambos frecuencias se van diferenciando hasta salir de la región de resonancia, con lo cual finaliza el proceso de creación de partículas asociadas a dicho modo.

Consideremos ahora la ecuación de Einstein semiclásica (V.8b ). Durante el descenso lento, la fuente de esta ecuación es  $T_{00}^{ef}(\phi_0) \cong V_{ef}(0)$  dado que  $\langle \tilde{T}^{ef} \rangle_{ren}$  es cero. Para  $\phi_0 \cong \phi_m$  el tensor de energía momento efectivo va a cero y  $\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren}$  domina el



miembro derecho de la ecuación. Es fácil encontrar la dependencia temporal de  $\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren}$  con el resultado de  $\beta_k$ . A partir de (V.16) tenemos

$$\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren} \simeq \frac{1}{2\pi^2 a^4} \int_0^{\Omega a/2} dk k^3 |\beta_k|^2, \quad (V.22)$$

entonces, para hacer una estimación de  $\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren}$ , pasaremos de una ecuación en  $k$  a una ecuación en  $t$  a través de la Ec.(V.21), y supondremos que la producción de partículas es casi constante durante varios períodos de oscilación del inflatón, de tal manera que el integrando se mantenga casi constante durante ese lapso. Con estas hipótesis, el resultado que se obtiene es:

$$\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren} \sim \frac{9h^2 \phi_m'^2 B^2}{64\pi}, \quad (V.23)$$

si aún no se alcanzó el tiempo característico en que se disipa la energía del inflatón ( $t_c$ ), y:

$$\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren} \sim \frac{9h^2 \phi_m'^2 B^2 a^4(t_c)}{64\pi a^4(t)}, \quad (V.24)$$

para tiempos mayores que  $t_c$ . De este último resultado vemos que, al finalizar el recalentamiento, la inflación ha concluido y el Universo se encuentra dominado por la radiación.

Entonces, si derivamos (V.22) respecto de  $t$  ( $t < t_c$ ), obtenemos:

$$(\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren})' \simeq (-4H + \Omega) \langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren}. \quad (V.25)$$

Dado que el término  $-4H$  corresponde en realidad a un corrimiento al rojo debido a la expansión del Universo, vemos que la tasa de producción de energía de las partículas creadas es del orden de  $\Omega \sim \lambda \phi_m$ .

Podemos concluir, entonces, que el recalentamiento del Universo debido a la creación de partículas se debe, principalmente, a la existencia de resonancias entre diversos grados de libertad del sistema. Recordamos que al estudiar los modelos clásicos encontramos un efecto similar, donde la aparición de resonancias conducía a la no conservación de la variable de acción adiabática y consecuentemente al *caos* (cf. Cap.IV). Asimismo, las partículas creadas por el campo rápidamente oscilante provocan la aparición de un término disipativo en la ecuación de evolución del inflatón, de tal manera de amortiguar las oscilaciones y frenar la creación de partículas. En vista de estos resultados y los obtenidos en capítulos anteriores, podemos abrigar fuerte sospecha sobre la integrabilidad de esta clase de modelos del Universo Primitivo, a la vez que se hace evidente la importancia de las contribuciones disipativas a la dinámica de los mismos [Calzetta, *El Hasi y Tavakol* 1994].

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSIONES

En años recientes, dos ramas de la física han suscitado especial interés: el estudio de los *Sistemas Dinámicos* y la *Cosmología*. La primera ha excedido incluso el ámbito de la física y se aplica en toda situación donde existan interacciones no lineales, como forma de comprender el desarrollo del sistema involucrado. En tanto, los estudios Cosmológicos se basan en la esperanza de construir un modelo que nos permita comprender el origen y la evolución de nuestro Universo.

Dado que las ecuaciones que describen el Universo Primitivo son no lineales, parece razonable entrelazar ambas ramas del conocimiento, e investigar las consecuencias que se derivan de esta unión. Así, en los capítulos II a IV mostramos como implementar diversas técnicas y métodos, de aplicación usual en Teoría de Sistemas Dinámicos, al estudio de problemas cosmológicos. En el V hemos avanzado hacia el desarrollo de una tarea similar en el marco de la Teoría Cuántica de Campos en el Espacio Tiempo Curvo.

En particular, en el capítulo II encontramos analíticamente las resonancias aproximadas del sistema, en términos de la variable de acción adiabática del campo escalar. Calculamos el Espectro Característico de Exponentes de Lyapuno: en regiones del espacio de fases con diverso comportamiento dinámico. Construimos las Secciones de Poincaré del sistema, a partir de variar las condiciones iniciales, mostrando la rotura de los toros KAM y la aparición de islas de estabilidad en su reemplazo. Destaquemos que no hemos encontrado en la bibliografía ninguna referencia donde se muestren Secciones de Poincaré de un modelo cosmológico. Además, estudiamos la correlación entre los valores del campo en el "Big Crunch", dados los valores correspondientes en el "Big Bang", para decidir si la detección del caos es viable durante el desarrollo de un único Universo.

Los resultados obtenidos confirman la existencia de comportamiento caótico en este modelo, para valores suficientemente grandes de la variable de acción adiabática, debido a la superposición de resonancias en el espacio de fases.

En el capítulo III analizamos un modelo más general. Vía el análisis de estabilidad lineal del sistema, mostramos que el comportamiento caótico no sólo es posible en cosmologías cerradas, como en el capítulo anterior, sino también en situaciones más generales. Implementamos el método de las curvas Frecuencia - Frecuencia y, a partir de las condiciones iniciales que se obtienen de él, construimos la Secciones de Poincaré. Ésto se efectuó de dos maneras diferentes: *barriendo* condiciones iniciales en el espacio de fases (como en el capítulo II), y variando los parámetros del modelo para condiciones iniciales fijas. Confirmamos nuevamente la aparición de caos por rotura sucesiva de toros resonantes, a la vez que verificamos la robustez del comportamiento caótico en estos modelos.

Posteriormente, en el capítulo IV, mostramos la utilidad del método de la Integral de Melnikov como indicador de *caos homoclínico* en situaciones donde el modelo es casi-integrable. Como primer resultado verificamos la validez del principio de *calvicie cósmica*, al comprobar cómo los Universos que no recolapsan se aproximan a una solución del tipo DeSitter. Por lo tanto el caos podría considerarse un buen mecanismo para evitar recurrir al *ajuste fino* en las condiciones iniciales de evolución del Universo. Vimos, también, que la posibilidad de escapar al recolapso está asociada a la aparición de ciertas estructuras en el espacio de fases: la rotura de los toros KAM, y la aparición de cantoros. La existencia de estas estructuras indica que el comportamiento dinámico del sistema es no trivial, aún antes de la etapa inflacionaria.

Por otra parte, al incluir un modo inhomogéneo al campo escalar, pudimos analizar la reacción del modelo cuando se incrementa el número de grados de libertad del mismo. Comprobamos, entonces, cómo aumenta la riqueza de comportamiento del sistema, visualizando explícitamente la no conservación de la variable de acción, y cómo el flujo dinámico evoluciona en forma totalmente compatible con la existencia de un proceso de *Difusión de Arnold*. A través de un mapa en el espacio de condiciones iniciales mostramos que es posible que el comportamiento irregular del sistema se extienda a todo el espacio de fases.

Finalmente en el capítulo V avanzamos hacia el estudio cuántico de estos problemas, al menos a nivel semiclásico, mostrando como pueden tratarse en forma autoconsistente las ecuaciones que gobiernan el Universo Primitivo. Vimos, también, que las técnicas usuales de Teoría Cuántica de Campos en el Espacio Tiempo Curvo son sumamente útiles al encarar estas cuestiones. A su vez, comprobamos que nuestro método ratifica la afirmación, hecha por otros autores, de que el fenómeno dominante para la creación de partículas, durante la etapa de recalentamiento posterior a la inflación, es el efecto de resonancia paramétrica entre los campos considerados.

Dado que tanto el comportamiento caótico a nivel clásico, como la creación de partículas a nivel semiclásico, se deben a la existencia de resonancias entre los distintos grados de libertad del sistema, podemos concluir que existe una estrecha relación entre ambos fenómenos.


Si bien el hecho que las ecuaciones de Einstein sean no lineales es estímulo suficiente para investigar la aparición de caos en estos modelos, hemos mostrado que, aún en sistemas muy simplificados como los que tratamos aquí, el estudio de estas cuestiones puede ser de alto interés práctico, en tanto y en cuanto el comportamiento caótico conduce a efectos no triviales y resultados, en principio, más complejos e interesantes que los que se encuentran usualmente en la literatura, donde en general se estudian límites asintóticos del modelo o se asume que las contribuciones no lineales son de relativa incidencia.


Aún cuando los modelos que hemos utilizado son demasiado sencillos para ser considerados realistas, no debemos olvidar que la evidencia observacional, con que se cuenta hoy día, es totalmente consistente con el concepto de un Universo en expansión, isótropo y homogéneo. No obstante, se debe proceder con cierta precaución en el estudio de modelos más complejos, donde se recurre a argumentos de simetría para reducir el número de grados de libertad del sistema: en efecto, en el capítulo IV verificamos la complejidad que puede adquirir la evolución dinámica, aún para modos muy debilmente acoplados.

Asimismo, la complejidad y diversidad de comportamiento que el *caos* parece aportar a la Cosmología, puede utilizarse en modelos más complejos. Al considerar métricas

anisótropas y/o tratar la materia y la radiación como campos cuánticos, el *caos* podría ser un candidato *natural* como mecanismo eficiente en la formación de estructuras en el Universo Primitivo.

Por supuesto analizar estas cuestiones en toda su dimensión requiere la utilización de métodos y técnicas, tanto analíticas como numéricas, más sofisticadas; como por ejemplo aplicar conceptos de *turbulencia* en teoría de campos y/o resolver sistemas de ecuaciones en *derivadas parciales* para el modelo completo. En ese sentido, creemos estar dando un primer paso en esa dirección. En definitiva, pensamos que el *caos* puede considerarse como una de las claves principales para comprender el origen y la evolución de nuestro Universo.

  
Claudio El Hasi

  
Esteban Calzetti

## Apéndice A

### Programa Utilizado

```

PROGRAM LIAP
SUBROUTINAS IMSL
c
C N = nro de ecuaciones no lineales.
implicit real*8 (a-h,o-z)
EXTERNAL FCN
DIMENSION Y(42), ZNORM(6), C(24), W(42,9), CUM(6), GSC(6)
COMMON Z, NN, XLAMBDA
PI=3.141592653589793
N=6
MM=42
DO 120 LL=-1,2
DO 110 NL=1,4
OPEN(UNIT=2,file='MAPA.DAT'.STATUS='APPEND')
OPEN(UNIT=3,file='V245.DAT'.STATUS='APPEND')
OPEN(UNIT=9,file='LIAP1.DAT'.STATUS='APPEND')
OPEN(UNIT=10,file='LIAP2.DAT'.STATUS='APPEND')
OPEN(UNIT=11,file='LIAP3.DAT'.STATUS='APPEND')
H=1.D0/2.D0
XLAMBDA=H**2/2.D0
OPEN(UNIT=7,file='DATA.DAT')
READ (7 , *) TOL, NSTEP, STPSZE, IO, Y(1), Y(2), Y(3),
Y(6), Z, NN
CLOSE (UNIT=7)
Y(6)=Y(6)-5.D0*DFLOAT(LL)/1.D5
Y(4)=Y(6)-5.D0*DFLOAT(NL)/1.D5
Y(5)=DSQRT(-Y(1)**2 - DFLOAT(NN)**2*Y(2)**2 + Y(3)**2 -
. (Z*Y(1)*Y(3))**2 - (Z*Y(2)*Y(3))**2 - Y(4)**2 + Y(6)**2 -
. 2.D0*XLAMBDA*Y(3)**4)
WRITE (5,*) 'Y1=', Y(1), 'Y2=', Y(2), 'Y3=', Y(3)
WRITE (5,*) 'Y4=', Y(4), 'Y5=', Y(5), 'Y6=', Y(6), XLAMBDA
C
Z= la masa del campo escalar. Y1=FI, Y2=A, Y3=PF, Y4=PA
HAM=(-Y(3)**2 + Y(1)**2*(1.D0 + (Z*Y(3))**2) + Y(2)**2*
. (DFLOAT(NN)**2 + (Z*Y(3))**2) + Y(4)**2 + Y(5)**2 - Y(6)**2)/2.D0+
. XLAMBDA*Y(3)**4
AA=Y(1)

```

```

        KK=0
C  Tolerancia de integracion (tipicamente entre 0.0001 y 0.00000001),
c  numero de pasos de integracion, tiempo por paso Y RELACION
C  I(nput)/O(utput)
C
C  Condiciones iniciales para el sistema lineal (sistema ortonormal)
        DO 10 I=N+1,MM
            Y(I)=0.0
10      CONTINUE
        DO 20 I=1,N
            Y((N+1)*I)=1.0
            CUM(I)=0.0
20      CONTINUE
C
C  Inicializacion para el integrador
        NEQ=MM
        X=0.D0
        I=1
C
        DO WHILE (KK.LE.3000.AND.I.LE.NSTEP)
            XEND=STPSZE*dFLOAT(I)
C
C  Llame al integrador ODE. Esto es una rutina IMSL
            CALL DVERK (NEQ,FCN,X,Y,XEND,TOL,IND,C,NEQ,W,IER)
            HAM=(-Y(3)**2 + Y(1)**2*(1.D0 + (Z*Y(3))**2) + Y(2)**2*
            . (DFLOAT(NN)**2 + (Z*Y(3))**2) + Y(4)**2 + Y(5)**2 - Y(6)**2)/2.D0+
            . XLAMBDA*Y(3)**4
C
            IF (DABS(HAM).GE.1.D-10) GO TO 105
C
C  construir una nueva base ortonormal por el metodo de GM

```

Aquí va la parte principal del programa, para calcular los Exponentes Característicos de Lyapunov, que aparece en la Ref. [Wolff et al. 1985].

```

C  datos para construir las secciones de Poincare
        IF (AA.LT.0..AND.Y(1).GE.0.) THEN
            WRITE (2,*) Y(3), Y(6)
            WRITE (3,*) Y(2), Y(4), Y(5)
            KK=KK+1
            IF (MOD(KK,500).EQ.0) WRITE (5,*) 'KK=', KK

```



```

        ENDIF
        AA=Y(1)
C
c  imprime datos para los Lyapunov
        IF(MOD(I,IO).EQ.0) THEN
            WRITE(9,*) X, CUM(1)/X, CUM(4)/X
            WRITE(10,*) CUM(2)/X, CUM(5)/X
            WRITE(11,*) CUM(3)/X, CUM(6)/X
        ENDIF
        I=I+1
        ENDDO
105    WRITE (9,*) 'LL=', LL, 'L=', NL, 'x=', x, 'HAM=', HAM
        SUMA=CUM(1)/X+CUM(2)/X+CUM(3)/X+CUM(4)/X+CUM(5)/X+CUM(6)/X
        WRITE (9,*) 'La suma de los Lyapunov es:', SUMA
        WRITE (10,*) 'LL=', LL, 'L=', NL
        WRITE (11,*) 'LL=', LL, 'L=', NL
        WRITE (2,*) 'LL=', LL, 'L=', NL, 'KK=', KK
        WRITE (3,*) 'LL=', LL, 'L=', NL, 'KK=', KK
        CLOSE(UNIT=2)
        CLOSE(UNIT=3)
        CLOSE(UNIT=9)
        CLOSE(UNIT=10)
        CLOSE(UNIT=11)
110    CONTINUE
120    CONTINUE
        STOP
        END
C
        SUBROUTINE FCN (N,X,Y,YPRIME)
C  definida por el usuario. rutina llamada por el integrador IMSL
        implicit real*8 (a-h,o-z)
        DIMENSION Y(N), YPRIME(N)
        COMMON Z, NN, XLAMBDA
C
C  ECUACIONES DE MOVIMIENTO
        YPRIME(1)=Y(4)
        YPRIME(2)=Y(5)
        YPRIME(3)=-Y(6)
        YPRIME(4)=-Y(1)*(1.D0 + (Z*Y(3))**2)
        YPRIME(5)=-Y(2)*(DFLOAT(NN)**2 + (Z*Y(3))**2)
        YPRIME(6)=(1.D0 - (Z*Y(1))**2 - (Z*Y(2))**2)*Y(3)-4.D0*XLAMBDA*
            Y(3)**3
C  4 copias de las ecuaciones linealizadas de movimiento

```

```

DO 200 I=0,5
C
YPRIME(7+I)=Y(25+I)
YPRIME(13+I)=Y(31+I)
YPRIME(19+I)=-Y(37+I)
YPRIME(25+I)=-(1.D0 + (Z*Y(3))**2)*Y(7+I)-
.      2.D0*Z**2*Y(1)*Y(3)*Y(19+I)
YPRIME(31+I)=-(DFLOAT(NN)**2 + (Z*Y(3))**2)*Y(13+I)-
.      2.D0*Z**2*Y(2)*Y(3)*Y(19+I)
YPRIME(37+I)=(1.D0 - (Z*Y(1))**2 - (Z*Y(2))**2)*Y(19+I) -
.      2.D0*Z**2*Y(3)* (Y(1)*Y(7+I) + Y(2)*Y(13+I)) -
.      12.D0*XLAMBDA*Y(3)**2*Y(19+I)
200 CONTINUE
RETURN
END

```

Con esto podemos calcular el corchete de Poisson que aparece en la integral de Melnikov (IV.12), y resulta:

$$\{h_{\text{c.}} - h_0 \delta h\} = -\frac{m^2 j}{8\Lambda} \frac{\sinh(\eta/\sqrt{2})}{\cosh^3(\eta/\sqrt{2})} (1 - \cos 2(\eta - \eta_0)) , \quad (\text{B.6})$$

donde hemos reescrito, para considerar el instante (o fase inicial),  $\varphi = \eta - \eta_0$ .

Después de integrar por partes, efectuar un cambio de variables y teniendo en cuenta que la integral es simétrica respecto de cero, la expresión que se obtiene es:

$$M(\eta_0) = \frac{m^2 j \sin 2\eta_0}{2\Lambda} \int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{2}x}{\cosh^2 x} dx . \quad (\text{B.7})$$

Esta integral se encuentra en tablas ([*Gradshteyn y Ryzhik 1980*], expresión 3.952, página 505), y el resultado que se obtiene es el de la Ec.(IV.14).

## Apéndice C

### Valores de Expectación Renormalizados

Dada la ecuación para los modos:

$$\chi''_{\mathbf{k}} + [k^2 + h\phi_0^2 a^2]\chi_{\mathbf{k}} = 0 . \quad (\text{V.11})$$

Una elección particular del conjunto de soluciones de la Ec.(V.11) implica la elección de un estado de vacío del campo. A diferencia del espacio de Minkowski, la elección del estado de vacío no es única en un espacio - tiempo curvo. Por otra parte, los valores de expectación que hay que calcular en las ecuaciones de campo (V.8), dependen obviamente del estado cuántico del sistema. Entonces, si elegimos el estado de vacío  $|0_{\eta_0}\rangle$  (para algún instante  $\eta_0$ ), como aquél que minimiza el Hamiltoniano [Mazzitelli, Paz y Castagnino 1987],

$$H(\eta_0) = \frac{1}{2} \int_{\eta=\eta_0} \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial x^i} \right)^2 + h\phi_0^2 a^2 \chi^2 \right] , \quad (\text{C.1})$$

los valores de expectación no renormalizados de  $\varphi^2$  y  $\hat{T}_{00}$  se pueden escribir en términos de los modos de la siguiente manera:

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{8\pi^3 a^2} \int d^3 k |\chi_{\mathbf{k}}|^2 . \quad (\text{C.2})$$

$$\langle \hat{T}_{00} \rangle = \frac{1}{16\pi^3 c^4} \int d^3 k (|\chi'_{\mathbf{k}}|^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 |\chi_{\mathbf{k}}|^2) . \quad (\text{C.3})$$

donde  $\omega_k^2 = k^2 + h\phi_0^2 a^2$ . Introduciendo, entonces las funciones complejas  $\alpha_k(\eta)$  y  $\beta_k(\eta)$ , como en el Cap.V, se llega a que la Ec.(V.11) es equivalente a las Ecs.(V.14), con la condición de normalización dada ( $|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$ ).

Si elegimos la condición inicial  $\alpha_k(\eta_0) = 1$  y  $\beta_k(\eta_0) = 0$ , entonces el estado de vacío es  $|0_{\eta_0}\rangle$ . En términos de las nuevas variables tenemos

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{16\pi^3 a^2} \int \frac{d^3 k}{\omega_k} (1 + 2s_k + 2z_k) , \quad (C.4)$$

$$\langle \tilde{T}_{00} \rangle = \frac{1}{16\pi^3 a^4} \int \frac{d^3 k}{\omega_k} (1 + 2s_k) , \quad (C.5)$$

donde  $s_k = |\beta_k|^2$  y  $z_k = \text{Re } \alpha_k \beta_k e_-^2$ .

Siguiendo la Ref.[*Paz y Mazzitelli 1988*], calculamos los valores de expectación renormalizados sustrayendo de las ecs.(C.4) y (C.5) las expansiones adiabáticas de segundo y cuarto orden (para un esquema del cálculo ver Apéndice D), respectivamente. El resultado para  $\varphi^2$  es

$$\langle \varphi^2 \rangle_{ren} = \frac{R}{288\pi^2} + \frac{1}{8\pi^3 a^2} \int \frac{d^3 k}{\omega_k} (s_k + z_k) . \quad (C.6)$$

La primera contribución es un término de polarización de vacío que se puede absorber en el potencial efectivo [*Birrel y Davies 1982*]. El segundo término está relacionado a la creación de partículas. Con la aproximación de que las fases de  $\alpha_k$  y  $\beta_k$ , varían rápidamente y al azar, podemos despreciar la contribución de  $z_k$  frente a  $s_k$  y obtenemos la Ec.(V.15).

Por otro lado, para el tensor energía - momento se obtiene:

$$\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren} = P(a, \dot{a}, \dots, \phi_0, \dot{\phi}_0) + \frac{1}{32\pi^3 a^4} \int d^3 k \omega_k s_k . \quad (C.7)$$

donde  $P$  denota términos finitos que incluyen hasta derivadas cuartas de la métrica (los términos de polarización de vacío) y hasta derivadas segundas de  $\phi_0$ . Como antes, la producción de partículas está contenida en el segundo término.

## Apéndice D

### Método de Renormalización

El cálculo de  $\langle \varphi^2 \rangle_{ren}$  puede hacerse como sigue. Escribiendo:

$$\chi_k = \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} \exp[-i \int^\eta W_k(\eta') d\eta'] . \quad (D.1)$$

La Ec.(V.11) se convierte en

$$W_k^2 = \omega_k^2 + \frac{3}{4} \left[ \frac{W'_k}{W_k} \right]^2 - \frac{1}{2} \frac{W''_{bfk}}{W_k} . \quad (D.2)$$

El valor medio de  $\varphi^2$  se puede escribir entonces (cf. Ec.(C.2)),

$$\begin{aligned} \langle \varphi^2 \rangle &= \frac{1}{16\pi^3 a^2} \int \frac{d^3 k}{W_k} [1 + 2n(k)] \\ &= F[W_k, n(k)] \end{aligned} \quad (D.3)$$

El valor medio renormalizado se define vía

$$\langle \varphi^2 \rangle_{ren} = F[W_k, n(k)] - F[\Omega_k, 0]_{ad2} , \quad (D.4)$$

donde  $\Omega_k$  es la aproximación, a segundo orden adiabático, de  $W_k$ . De (D.2) encontramos

$$\Omega_k^2 = \omega_k^2 - \frac{M^2 a^{2''}}{4\omega_k^2} + \frac{5M^4}{16\omega_k^4} (a^{2'})^2 , \quad (D.5)$$

así

$$F[\Omega_{\mathbf{k}}, 0]|_{ad2} = \frac{1}{16\pi^2 a^2} \int \frac{d^3 k}{\omega_{\mathbf{k}}} + \frac{R}{288\pi^2} . \quad (\text{D.6})$$

El valor de expectación renormalizado se puede obtener de substraer (D.6) de (D.3). El término infinito se cancela explícitamente si, en lugar de (D.3), se utiliza la expresión equivalente (C.4). El resultado final es la ecuación (C.6).

El cálculo de  $\langle \tilde{T}_{00} \rangle_{ren}$  se puede hacer siguiendo los mismos lineamientos, pero las expresiones son más complicadas debido a que se deben calcular las aproximaciones de cuarto orden adiabático en  $W_{\mathbf{k}}$  y  $W'_{\mathbf{k}}/W_{\mathbf{k}}$ .



## REFERENCIAS

- Abbott L.F., Farhi E. y Wise M., 1982 *Phys. Lett.* 117B 29.
- Abbott L.F. y Pi S.Y. eds., 1986 *Inflationary Cosmology* (World Scientific, Singapur).
- Albrecht A., Steinhardt P., Turner P.J. y Wilczek F., 1982 *Phys. Rev. Lett.* 48 1437.
- Amendola L, Litterio M and Occhionero F 1990 The Phase Space View of Inflation (I) *Int. J. Mod. Phys. A* 5 3861-86.
- Arnold V.I., 1963 Small denominators and the problem of stability of motion in classical and celestial mechanics *Russ. Math. Surv.* 18 85-191.
- Arnold V.I., 1964 *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 156 1, p. 9 (Trad. Ingl. *Sov. Math. Dokl.* 5 581).
- Arnold V.I., 1978 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Berlin, Springer-Verlag) (2da. edición, 1989).
- Arnold V.I y Avez A., 1968 *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (New York, Benjamin).
- Arnowitt R., Deser S. y Misner C.W., 1962 en *Gravitation: An Introduction to Current Research* ed. L. Witten (Wiley, New York).
- Bai-Lin H., 1990 *Chaos II* (Singapur, World Scientific).
- Belinsky V.A., Grishchuk L.P., Khalatnikov I.M. y Zel'dovich Ya. B., 1985a Inflationary Stages in Cosmological Models with a Scalar Field. *Phys. Lett.* 155B, 232-6.
- Belinsky V.A., Grishchuk L.P., Khalatnikov I.M. y Zel'dovich Ya. B., 1985b (mismo título) *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 89 346-60 (Trad. Ingl. *Sov. Phys. JETP* 62 195-203).
- Belinsky V.A., Grishchuk L.P., Khalatnikov I.M. y Zel'dovich Ya. B., 1985c (mismo título) *Proceedings of the Third Seminar on Quantum Gravity* ed. M. A. Markov, V. A. Berezin and V. P. Frolov ( Singapur, World Scientific) 566-90.
- Belinskii V.A., Khalatnikov Z.M. y Lifshitz E.M., 1970 Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology *Adv. Phys.* 19 525-73.
- Benettin G., Galgani L., Giorgilli A. y Strelcyn J.M., 1980 Lypunov Characteristic Exponents for Smooth Dynamical Systems and for Hamiltonian Systems: a Method for Computing All of Them. *Meccanica* 15. 9 y 21.

- Benettin G., Galgani L. y Strelcyn J.M., 1976 Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments *Phys. Rev. A* **14** 2338.
- Berger B.K., 1989 Quantum chaos in the mixmaster universe *Phys. Rev. D* **39** 2426-9.
- Berger B.K., 1990 Numerical study of initially expanding mixmaster universes *Class. Quantum Grav.* **7** 203-16.
- Berger B.K., 1991 Comments on the computation of the Lyapunov Exponents for the Mixmaster Universe *Gen. Relat. Grav.* **23** 1385.
- Berry M.V., 1978 Regular and irregular motion *Topics in Nonlinear Dynamics* ed. S. Jorna. Am. Inst. Phys. Conf. Proc. **46** 16-120.
- Berry M.V. 1983 Semiclassical mechanics of regular and irregular motion *Chaotic Behavior of Deterministic Systems* ed. G Iooss. R H G Helleman and R Stora (New York, North-Holland) 171.
- Birrell N.D. y Davies P.C.W., 1982 *Quantum Fields on Curved Spaces* (Cambridge University Press. Cambridge).
- Birkhoff G.D., 1927 *Dynamical Systems* (American Mathematical Society. Providence).
- Bjorken J.D. y Drell S.D., 1964 *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill).
- Blanco S., Domenech G., El Hasi C. y Rosso O., 1994 Chaos in Classical Cosmology *Gen. Rel. Grav.* (en prensa).
- Bogoyavlensky O.I., 1985 *Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics* (Berlín. Springer - Verlag).
- Bombelli L. y Calzetta E., 1992 Chaos around a Black Hole *Class. Quantum Grav.* **9** 2573.
- Bombelli L., Castagnino M. y Lombardo F., 1994 ( preprint ) Chaos in Robertson-Walker Cosmology ( enviado a ).
- Börner G., 1988 *The Early Universe* (New York. Springer - Verlag) (2da. Edición 1992).
- Brandenberger R.H., 1985 Inflationary Cosmology *Rev. Mod. Phys.* **57** 1.
- Burd A., Buric N. y Ellis G., 1990 A numerical analysis of chaotic behaviour in Bianchi IX models *Gen. Rel. Grav.* **22** 349-63.
- Burd A. y Tavakol R. 1993 Invariant Lyapunov exponents and chaos in cosmology *Phys. Rev. D* **47**. 5336.
- Calzetta E., 1989 Spinodal Decomposition in Quantum Field Theory *Ann. Phys. (N.Y.)* **190** 32.

- Calzetta E., 1991 Particle Creation, Inflation, and Cosmic Isotropy *Phys. Rev. D* 44 3043.
- Calzetta E., 1994 Homoclinic Chaos in Relativistic Cosmology, *Deterministic Chaos in General Relativity*, eds. A. Burd. A. Coley y D. Hobill (Plenum, New York).
- Calzetta E. y Castagnino M., 1981 Riemannian approach and cosmological singularity *Phys. Rev. D* 29 1609.
- Calzetta E. y El Hasi C., 1993 Chaotic Friedmann-Robertson-Walker Cosmology *Class. Quantum Grav.* 10 1825-1841.
- Calzetta E. y El Hasi C., 1994 Nontrivial Dynamics in the Early Stages of Inflation ( , preprint ) (enviado a *Phys. Rev. D*).
- Calzetta E., El Hasi C. y Tavakol R.K., 1994 ( en preparación ).
- Calzetta E. y Sakellariadou M., 1993 Semiclassical Effects and the Onset of Inflation *Phys. Rev. D* 47 3184.
- Capozziello S., Ochionero F. y Amendola L., 1993 The phase-space view of inflation: II. fourth order models. *Int. J. Mod. Phys. D*.
- Chirikov B.V., 1979 A universal instability of many dimensional oscillator systems *Phys. Rep.* 52 263.
- Coleman S. y Weinberg E., 1973 *Phys. Rev. D* 7 1538.
- Crutchfield J.P., Farmer J.D., Parkard N.H. y Shaw R.S., 1986 *Chaos Sci. Amer.* 254 46.
- Cvitanović P. ed., 1989 *Universality in Chaos* (Adam Hilger, Bristol y New York).
- DeSitter W., 1917a *Proc. Kond. Ned. Akad. Wet.* 19 229.
- DeSitter W., 1917b *Proc. Kond. Ned. Akad. Wet.* 19 1217.
- Fischetti M.V., Hartle J.B. y Hu B.L., 1979 *Phys. Rev. D* 29 1957.
- Francisco G. y Matsas G.E.A., 1988 Qualitative and numerical study of Bianchi IX models *Gen. Rel. Grav.* 20 1047-54.
- Friedmann A., 1922 *Z. f. Physik* 10 377.
- Froeschlé C., 1970 *Astron. Astrophys.* 4 115.
- Froeschlé C., 1972 *Astron. Astrophys.* 16 172.
- Frøyland J., 1992 *Chaos and Coherence* (IOP, Bristol).
- Futamase T., Maeda K., 1989 Chaotic Inflationary scenario of the Universe with a nonminimally coupled "inflaton" field *Phys. Rev. D* 39 399-404.

- Futamase T., Rothman T. y Matzner R., 1989 Behavior of Chaotic Inflation in Anisotropic Cosmologies with Nonminimal Coupling *Phys. Rev. D* 39 405-11.
- Gibbons G. y Hawking S.W., 1977 *Phys. Rev. D* 15 2738.
- Goldstein H., 1980 *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts).
- Gradshteyn I.S. y Ryzhik I.M., 1980 *Table of Integrals, Series, and Products* (New York, Academic Press).
- Guckenheimer J. y Holmes P., 1983 *Non-Linear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer-Verlag, Berlín).
- Guth A., 1981 *Phys. Rev. D* 23, 347.
- Guth A. y Pi S.Y., 1985 *Phys. Rev. D* 32 1899.
- Hartle J. B., 1981 *Phys. Rev. D* 23 2121.
- Hénon M., 1983 Numerical exploration of Hamiltonian Systems. en *Chaotic behavior of deterministic systems*, ed. G. Iooss, R. Helleman y R. Stora (North-Holland, Amsterdam) p. 53.
- Hénon M. y Heiles C., 1964 *Astron. J.* 69 73.
- Hobill D., 1991 Sources of chaos in mixmaster cosmologies *Non Linear Problems in Relativity and Cosmology*, ed. J Buchler, S Detweiler and J Ipser. Ann. N.Y. Acad. Sci. 631 (New York, N.Y. Acad. Sci.) 15-30.
- Hobill D., Bernstein D., Wedge M. y Simkins D., 1991 The mixmaster cosmology as a dynamical system *Class. Quantum Grav.* 8 1155-71.
- Holmes P., 1990 Poincaré, Celestial Mechanics, Dynamical Systems Theory and "Chaos" *Phys. Rep.* 193 137.
- Holmes P.J. y Marsden J.E., 1982 Melnikov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems *J. Math. Phys.* 23 669-75.
- Hu B.L. y O'Connor D.J., 1984 *Phys. Rev D* 30 743.
- Itzykson C. y Zuber J.B., 1980 *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill).
- Jensen R.V., 1987 Classical Chaos *Am. Scientist* 75 168.
- Khalatnikov I.M., Lifschitz E.M., Khanin K.M., Shchur L.N. y Sinai Ya G., 1985 On the stochasticity in relativistic cosmology *J. Stat. Phys.* 38 97-114.
- Kofman L., Linde A. y Starobinsky A., 1994 ( preprint ) Reheating After Inflation *UH-IfA* 94 - 35.

- Koiller J., De Meleto Neto J.R.T. y Damião Soares I., 1985 Homoclinic Phenomena in the Gravitational Collapse *Phys. Lett.* 110A 260.
- Kolmogorov A.N., 1957 On the preservation of quasi-periodic motions under a small variation of Hamilton's function *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 98 525 (Trad. Engl. *Proceedings of the 1954 International Congress of Mathematics* (North-Holland, Amsterdam)).
- Kolb E.W. y Turner M.S., 1990 *The Early Universe* (Addison Wesley Pub. Co.).
- Kummer M., 1978 On Resonant Classical Hamiltonians with Two Equal Frequencies *Commun. Math. Phys.* D 58, 85-112.
- Kurki-Suonio H., Laguna P. y Matzner R., 1993 Inhomogeneous Inflation: numerical evolution *Phys. Rev D* 48, 3611.
- Landau L. y Lifschitz E.M., 1959 *Fluid Mechanics* (London, Pergamon).
- Landau L. y Lifschitz E. M., 1960 *Mechanics* (London, Pergamon).
- Landau L. y Lifschitz E.M., 1975 *Classical Theory of Fields* (London, Pergamon).
- Linde A., 1982 *Phys. Lett.* 108B 339.
- Linde A., 1983 *Phys. Lett.* 129B 177.
- Lichtenberg A. J. y Lieberman M. A. 1982 *Regular and Chaotic Dynamics* (New York, Springer - Verlag).
- Lorenz E.N., 1963 Deterministic Non Periodic Flow *J. Atmos. Sci.* 20 130.
- Lucchin F. y Matarrese S., 1985 *Phys. Rev.* D32 1316.
- MacKay R.S. y Meiss J.D., 1987 *Hamiltonian Dynamical System* (Bristol, IOP).
- Mazzitelli F.D., Paz J.P. y Castagnino M.A., 1987 *Phys. Rev.* D36 2994.
- Mazzitelli F.D., Paz J.P. y El Hasi C., 1989 Reheating of the Universe and Evolution of the Inflaton *Phys. Rev.* D40 955-966.
- McCracken D. y Dorn W 1964 *Numerical Methods and FORTRAN Programming* (New York, John Wiley).
- Meiss J.D., 1992 Symplectic Maps, variational principles, and transport *Rev. Mod. Phys.* 64 795.
- Melnikov V.K., 1963 On the stability of the center for the time periodic perturbations *Moscow Math. Soc.* 12 1.
- Misner C.W., 1969a Quantum cosmology I *Phys. Rev.* 186 1319-27.
- Misner C.W., 1969b Absolute zero of time *Phys. Rev.* 186 1328-33.

- Misner C.W., 1970 Classical and quantum dynamics of a closed universe *Relativity* ed. M Carmeli, S I Fickler and L Witten (New York, Plenum) 55-79.
- Misner C., Thorne K. and Wheeler A., 1973 *Gravitation* (San Francisco, Freeman).
- Mollerach S., Matarese S., Ortolan A. y Lucchin F., 1991 *Phys. Rev. D* **44** 1670.
- Moser J., 1962 On invariant curves of area-preserving mappings on an annulus *Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math. Phys. K1* 1.
- Nakao K., Maeda K., Nakamura T. y Oohara K., 1991 Numerical study of cosmic no-hair conjecture: formalism and linear analysis *Phys. Rev. D* **43** 1788.
- Nakao K., Maeda K., Nakamura T. y Oohara K., 1993 Numerical study of cosmic no-hair conjecture. II. Analysis of initial data *Phys. Rev. D* **47** 3194.
- Oseledec V.I., 1968 *Tr. Mosk. Mat. Obsch.* **19**, 179 (Trad. Inglesa *Trans. Mosc. Math. Soc.* **19**, 197).
- Ozorio de Almeida A.M., 1988 *Hamiltonian Systems, Chaos and Quantization* (Cambridge, Cambridge University Press).
- Padmanabhan T., 1989 Some Fundamental Aspects of Semiclassical and Quantum Gravity *Int. J. Mod. Phys. A* **4** 4735-4815.
- Parker L., 1969 *Phys. Rev.* **183** 1057.
- Paz J.P. y Mazzitelli F.D., 1988 *Phys. Rev. D* **37** 2170.
- Peebles P.J.E., 1971 *Physical Cosmology* (Princeton University Press).
- Percival I.C. y Richards D., 1982 *Introduction to Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge).
- Poincaré H., 1892 *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (Gauthier-Villars, Paris).
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. y Flannery B.P., 1992 *Numerical Recipes in Fortran. Second Edition* (Cambridge).
- Pullin J., 1991 Time and Chaos in General Relativity *Relativity and Gravitation: Classical and Quantum*, ed. J. C. D'Olivo et al. (Singapur, World Scientific) 189-97.
- Raychaudhury A.K., 1979 *Theoretical Cosmology* (Clarendon Press, Oxford).
- Reichi L.E. y Zheng W.M., 1987 Non Linear Resonance and Chaos in Conservative Systems, in *Directions in Chaos* ed. Hao Bai-Lin (Singapur, World Scientific).
- Robertson H.P., 1935 *Astrophys. J.* **82**, 248.

- Robertson H.P., 1936a *Astrophys. J.* **83**, 187.
- Robertson H.P., 1936b *Astrophys. J.* **83**, 257.
- Ryan M., 1972 *Hamiltonian Cosmology* (Berlin. Springer - Verlag).
- Ryan M. y Shepley L. 1975 *Relativistic Homogeneous Cosmology* (Princeton, Princeton University Press).
- Ryder L., 1985 *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge).
- Rugh S.E., 1990 ( preprint ) Chaos in the Einstein Equations *NBI - HE* 91 - 59.
- Rugh S.E., 1994 ( preprint ) Chaos in the Einstein Equations - Characterization and Importance? *NBI - HE* 94 - 07.
- Sagdeev R.Z., Usikov D.A. y Zaslavsky G.M., 1988 *Nonlinear Physics* (Harwood Academic Publishers. Poststrasse).
- Shtanov Y., Traschen J. y Brandenberger R., 1994 ( preprint ) Universe Reheating After Inflation *BROWN - HET* - 957.
- Starobinsky A.A., 1984a *Piz'ma Astron. Zh.* **10** 323 (*Sov. Astron. Lett.* **10** 135).
- Starobinsky A.A., 1984b en *Quantum Gravity II* eds. M Markov y P.C. West (Plenum, New York).
- Stolovitzky G. y Hernando J.A., 1990 *Phys. Rev. A* **41** 3026.
- Tabor M., 1989 *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamic* (John Wiley & Sons).
- Traschen J. y Brandenberger R.H., 1990 *Phys. Rev. D* **42** 2491.
- Vilenkin A. 1983 *Phys. Rev. D* **27** 2848.
- Walker A.G., 1936 *Proc. Lond. Math. Soc.* **42**, 90.
- Wald R.M., 1984 *General Relativity* (The University of Chicago Press).
- Weinberg S., 1972 *Gravitation and Cosmology* (New York, John Wiley).
- Wolf A., Swift J., Swinney. H. y Vastano J., 1985 Determining Lyapunov Exponents from a Time Series *Physica* **16D** 285-317.
- Zaslavsky G. M., 1985 *Chaos in Dynamic System* (Harwood Academic Publishers. Amsterdam).
- Zaslavsky G.M., Sagdeev R.Z., Usikov D.A. y Chernikov A.A., 1991 *Weak Chaos and Quasi Regular Patterns* (Cambridge. Cambridge University Press).

## AGRADECIMIENTOS

Ha sido un placer contar, durante la etapa más importante de desarrollo de esta tesis, con la permanente colaboración, guía y estímulo del Dr. Esteban Calzetta.

Agradezco a los miembros del grupo de Relatividad y Gravitación, que dirige el Dr. Mario Castagnino, quienes, ya científicamente, ya humanamente han contribuido a la realización de mi tarea.

Quiero mencionar a aquellos que han compartido su tiempo, conocimientos y esfuerzo conmigo durante esta etapa, los Drs. S. Blanco, G. Domenech, J. P. Paz, O. Rosso y N. Umérez. Y especialmente al Dr. D. Mazzitelli, por su constante buena predisposición y ayuda.

A los miembros del Instituto de Astronomía y Física del Espacio, dependiente del CONICET, muchas gracias por el clima de amistad y camaradería que me han brindado. En particular, para dos amigos quienes, aunque en distintos temas, hemos compartido este período de doctorandos, mate y fútbol de por medio, el Dr. N. Rotstein y el cuasi-Dr. E. Colombo.

Esta tesis ha sido auspiciada por la UBA, a través del Dpto. de Física de la FCEyN, mediante diversas becas y cargos docentes, agradezco a los responsables por el apoyo brindado.

